12. Изометрије

Један од начина посматрања неке геометрије је путем њене групе трансформација, пресликавања која "чувају" њене карактеристике. Таква пресликавања за еуклидску или хиперболичку геометрију су изометрије.

Дефиниција

Свака бијекција $\mathcal{I}$ праве, равни или простора на себе, за коју важи да је $(A, B) \cong (\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$ је **изометријска трансформација** или **изометрија**.
Геометријски лик који се изометријом слика на себе је **инваријантнан** или **фиксан** за ту изометрију.

Пример *Пресликавање $\mathcal{E}$ праве (односно равни или простора) где за произвољну тачку X важи $\mathcal{E}(X) = X$ је иден*тичко *пресликавање или коинциденција. Тривијално следи и да је $\mathcal{E}$ бијекција и да је изометрија.*

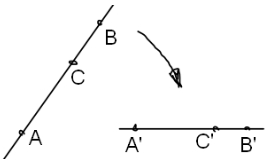
Теорема (10.6)

Скуп свих изометрија дате праве (равни или простора) је група у односу на производ трансформација.

Доказ. Нека су A, B произвољне тачке домена и $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ две изометрије.
Композиција две бијекције је бијекција, а за бијекцију постоји инверзно пресликавање које је такође бијекција.
Важи $(A, B) \cong (\mathcal{I}_1(A), \mathcal{I}_1(B)) \cong (\mathcal{I}_2(\mathcal{I}_1(A)), \mathcal{I}_2(\mathcal{I}_1(B)))$, јер су редом, $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ изометрије. Зато је и $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ изометрија.
Слично, нека је $\mathcal{I}_1^{-1}(A) = A_0, \mathcal{I}_1^{-1}(B) = B_0$. Тада $\mathcal{I}_1 : A_0, B_0 \mapsto A, B$ па је $(A_0, B_0) \cong (A, B)$, тј. $(\mathcal{I}_1^{-1}(A), \mathcal{I}_1^{-1}(B)) \cong (A, B)$, па је и $\mathcal{I}_1^{-1}$ изометрија. $\square$

Примедба *Ове групе НИСУ комутативне!*

Нека је $\mathcal{I}$ изометрија и нека су слике разних тачака A, B тачке A', B'. Нека је C произвољна тачка праве AB и нека је $\mathcal{I}(C) = C'$. Тада, с обзиром да је $\mathcal{I}$ изометрија важи да је $(A, B, C) \cong (\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B), \mathcal{I}(C)) = (A', B', C')$.



Због Теореме 10.3 тада следи да је C' тачка праве $A'B'$ која је, при том, у истом распореду у односу на A', B' као C у односу на A, B. Дакле, изометрија слика колинеарне тачке у колинеарне и "чува" распоред.

Сличним резоновањем показује се да важи следеће тврђење.

Теорема (10.7, 10.8)

Изометријом $\mathcal{I}$ се права слика на праву, полуправа са теменом O на полуправу са теменом $\mathcal{I}(0)$, дуж AB у дуж са теменима $\mathcal{I}(A)$ и $\mathcal{I}(B)$, раван на раван, полураван са рубом p на полураван са рубом $\mathcal{I}(p)$,...

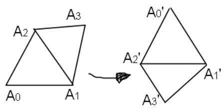
Теорема (...)

конвексан угао $\angle pq$ у конвексан угао са крацима $\mathcal{I}(p)$ и $\mathcal{I}(q)$, полигонска линија у полигонску линију, n-тоугао у n-тоугао, полигонска површ у полигонску површ, рогаљ у рогаљ, полиедар у полиедар,...

Теорема

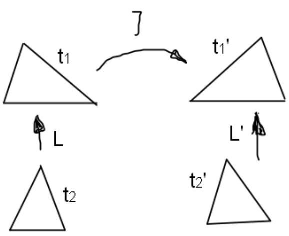
Изометрија слика ланац оријентисаних дужи/троуглова/тетраедара у ланац дужи/троуглова/тетраедара исте парности.

Доказ. Покажимо тврђење за оријентисане троуглове.



Нека је $A_0 \dots A_n$ ланац оријентисаних троуглова. Нека $\mathcal{I} : A_0, \dots, A_n \mapsto A'_0, \dots, A'_n$.

С обзиром да су сваке три узастопне тачке у првом низу неколинеарне и да $\mathcal{I}$ "чува" колинеарност и сваке три узастопне тачке у низу $A'_0 \dots A'_n$ су неколинеарне те се ради о ланцу оријентисаних троуглова. Уколико је $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ чине преоријентацију, тј. $A_{i-1}, A_{i+2} \div A_iA_{i+1}$, важиће и $A'_{i-1}, A'_{i+2} \div A'_iA'_{i+1}$ јер $\mathcal{I}$ "чува" и положаје тачак у односу на праве. Зато је и $A'_{i-1}A'_iA'_{i+1}$ и $A'_iA'_{i+1}A'_{i+2}$ преоријентација. Дакле, преоријентација се слика у преоријентацију па су и оригинални ланац и његова слика исте парности. □



Зато, ако су два оријентисана троугла t_1 и t_2 истосмерна, ланац који их повезује је паран, па ће и њихове слике t'_1 и t'_2 бити међусобно истосмерне. Такође ако је $t_1 \rightleftarrows t'_1$ односно ако је изометрија "променила оријентацију" једног троугла, онда ће важити и $t_2 \rightleftarrows t'_2$, тј. промениће и сваком другом.

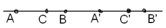
Дефиниција

Изометрија праве/равни/простора којом се оријентисане дужи/троуглови/тетраедри сликају у истосмерне дужи/троуглове/тетраедре је **директна**, а она којом се сликају у супротносмерне **индиректна** изометрија.

Теорема (10.12)

Нека су A, B две разне тачке праве p и $A', B' \in p$ т.д. је $(A, B) \cong (A', B')$. Тада постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ праве p таква да $\mathcal{I} : A, B \mapsto A', B'$.

Доказ. Пронађимо изометрију $\mathcal{I}$ тд $\mathcal{I}(A) = A', \mathcal{I}(B) = B'$. Нека је $C \in p$, произвољна. Нека је $\mathcal{I}(C) = C'$. Чиме је одређено C'? С обзиром да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$ из Теореме 10.3 следи да постоји јединствена тачка на правој p која испуњава овај услов, тј. јединствен избор за $\mathcal{I}(C)$.



Зато постоји јединствено пресликавање $\mathcal{I}$ које "чува" подударност парова $(A, X) \cong (A', X')$ и $(B, X) \cong (B', X')$. Лако се покаже да тако дефинисано $\mathcal{I}$ јесте изометрија, односно да за произвољне $M, N \in p$ важи $(M, N) \cong (\mathcal{I}(M), \mathcal{I}(N))$ и да је $\mathcal{I}$ бијекција. □

Теорема (10.13)

Нека су A, B, C три неколинеарне тачке равни π и $A', B', C' \in \pi$ такве да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$. Тада постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ равни π таква да $\pi : A, B, C \mapsto A', B', C'$. **БД**

Теорема (10.14)

Нека су A, B, C, D некомпланарне тачке и A', B', C', D' такве да је $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$. Тада постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ простора таква да $\mathcal{I} : A, B, C, D \mapsto A', B', C', D'$. **БД**

Дефиниција

Два геометријска лика Φ и Φ' су **подударна** ако постоји изометрија $\mathcal{I}$ таква да $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$, и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

Дакле, два троугла су подударна, по дефиницији, ако постоји изометрија која слика један у други.

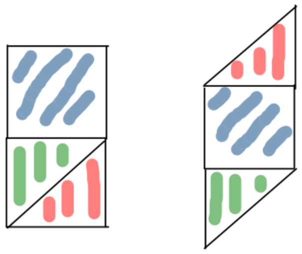
Теорема (10.15)

Релација подударности геометријских фигура је релација еквиваленције.

Доказ. (Рефлексивност) Ако је $\mathcal{E}$ коинциденција простора $\mathcal{E}(\Phi) = \Phi$ те $\Phi \cong \Phi$.

(Симетричност) Ако је $\Phi_1 \cong \Phi_2$ јер $\mathcal{I}(\Phi_1) = \Phi_2$, за неку изометрију $\mathcal{I}$, онда $\mathcal{I}^{-1}(\Phi_2) = \Phi_1$, па је $\Phi_2 \cong \Phi_1$.

(Транзитивност) Ако је $\Phi_1 \cong \Phi_2$ и $\Phi_2 \cong \Phi_3$ јер $\mathcal{I}_1(\Phi_1) = \Phi_2$ и $\mathcal{I}_2(\Phi_2) = \Phi_3$, где су $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ изометрије, онда $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1(\Phi_1) = \Phi_3$ па је $\Phi_1 \cong \Phi_3$. $\square$



Дефиниција

Нека су ω и ω' два геометријска лика за која постоје разлагања, редом, на ликове $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ и $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_k'$ тако да $\omega_i \cong \omega_i'$, $i \in \{1, \ldots k\}$. Тада су ω и ω' **разложиво подударни** и пишемо $\omega \stackrel{r}{=} \omega'$.