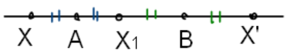
18. Композиције рефлексија

Видели смо да је свака изометрија праве/равни/простора композиција до 2/3/4 рефлексије. Сада можемо посматрати неке посебне композиције рефлексија.

Изометрије праве. Свака изометрија праве је или централна рефлексија $\mathcal{S}_A$ (индиректна) или композиција $\mathcal{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ (директна).
Ако је $A = B$ онда је $\mathcal{I} = \mathcal{E}$, идентичко пресликавање.
Ако је $A \neq B$:



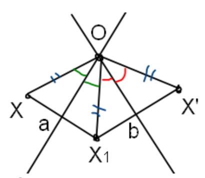
Нека је X произвољна тачка праве $\mathcal{S}_A(X) = X_1$, $\mathcal{S}_B(X_1) = X'$. Како је A средиште XX_1, а B средиште X_1X' може се показати да је $XX' = 2AB$ и да је $XX' \rightrightarrows AB$ (*). Зато $\mathcal{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ називамо **транслацијом** и означавамо $\tau_{2\overrightarrow{AB}}$. Транслација нема фиксних тачака.
Важи $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_C, \overset{(*)}{\Leftrightarrow} CD \cong AB$ и $CD \rightrightarrows AB$.

Дакле, можемо τ представити помоћу било које две тачке C и D, т.д. је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Теорема (Класификација изометрија праве)

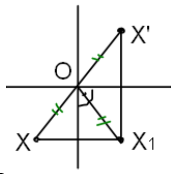
Индиректне изометрије (апсолутне) праве су централне рефлексије, а директне изометрије су идентичко пресликавање и транслације.

Изометрије равни. Наведимо неке типове изометрија.
1. Нека $a \cap b = \{O\}$ и $\mathcal{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$.



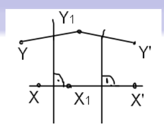
Нека је X произвољна тачка њихове равни, $\mathcal{S}_a(X) = X_1$, $\mathcal{S}_b(X_1) = X'$. Тада је $OX \cong OX_1 \cong OX'$. Нека су $A \in a$ и $B \in b$ средишта XX_1 и X_1X'. С обзиром да су OA и OB редом бисектрисе углова $\angle XOX_1$ и $\angle X_1OX'$, може се показати да је $\angle XOX' = 2\angle AOB$, и да је $\triangle XOX' \rightrightarrows \triangle AOB$.
Можемо тада рећи и да су углови исто оријентисани и писати $\measuredangle XOX' = 2\measuredangle AOB$.

$\mathcal{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ називамо **централном ротацијом равни** и означавамо $\mathcal{R}_{O,\alpha}$, где је $\alpha = 2\measuredangle AOB$. $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ је директна трансформација. O је њена једина фиксна тачка (јер је директна изометрија са бар две фиксне тачке коинциденција, па би $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_a$).
Специјално,



ако је $a \perp b$, $\angle AOB$ је опружен, па је O средиште XX'. Тада ову трансформацију зовемо **централном симетријом** равни и означавамо са $\mathcal{S}_O$. Важи $\mathcal{S}_O^{-1} = \mathcal{S}_O$.

Обратимо пажњу, централна симетрија равни је директна трансформација, а централна рефлексија праве индиректна.
2. Нека $a \neq b$ и нека постоји права s, $s \perp a, b$, која их сече редом у A и B.

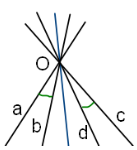


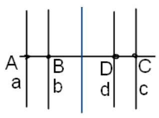
Нека је $X \in s$, $Y \notin s$ и нека $\mathcal{S}_a : X, Y \mapsto X_1, Y_1$, $\mathcal{S}_b : X_1, Y_1 \mapsto X', Y'$. Тачке X, X_1, X' су колинеарне и $XX' = 2AB$, $XX' \rightrightarrows AB$.

У хиперболичкој равни Y, Y' и Y_1 неће бити колинеарне!

Трансформацију $\mathcal{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ зовемо **транслацијом равни** и означавамо са $\tau_{2\overrightarrow{AB}}$. Она је директна. Транслација нема фиксних тачака (јер из $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(X) = X$ следи $X \in a \cap b$).

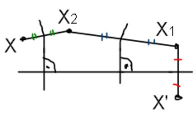
Примедба *Ако је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$, тј. еквивалентно $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, праве a, b, c, d припадају једном прамену и при том је оса симетрије правих а и с иста као и за b и d.*

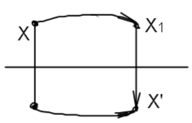




Примедба...*У случају $a, b \in \mathcal{X}_O$ важи $\measuredangle AOB = \measuredangle DOC$, па ротацију можемо представити помоћу било које две праве које се секу у O под датим оријентисаним углом.*
У случају $a, b \in \mathcal{X}_s$, нека c, d секу s у C и D. Важи да је $AB \cong DC$ и $AB \rightrightarrows DC$, па транслацију равни можемо представити помоћу било које две праве d и c ортогоналне на s, такве да је $DC \cong AB$ и $DC \rightrightarrows AB$.

3. Нека је $a, b \perp c$, $a \cap c = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$, $A \neq B$.





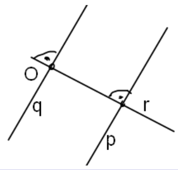
Изометрија $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \tau_{2\overrightarrow{AB}}$. С обзиром да $a, b \perp c$ одговарјуће рефлексије комутирају, па је и $\mathcal{I} = \tau_{2\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_c$. Ова трансформација је **клизајућа рефлексија**. Означавамо је са $\mathcal{G}_{c,2\overrightarrow{AB}}$, где $A, B \in c$. $\mathcal{G}_{c,2\overrightarrow{AB}}$ је индиректна изометрија (као композиција три рефлексије).

Клизајућа рефлексија нема фиксних тачака (јер је индиректна изометрија са бар једном фиксном тачком осна рефлексија, а онда би a, b, c припадале једном прамену.)

Теорема

Ако три праве a, b, c једне равни не припадају истом прамену онда је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ клизајућа рефлексија.

Доказ. $\mathcal{I}$ је индиректна трансформација (као композиција три рефлексије). Ако би $\mathcal{I}$ имала бар једну фиксну тачку, онда би била осна рефлексија, а тада би по дефиницији a, b, c припадале једном прамену.



Нека је X произвољна тачка и $\mathcal{I}(X) = X'$ $(X \neq X')$. Нека је O средиште дужи XX'. Изометрија $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ је индиректна (као композиција директне и индиректне). При том, $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}(X) = X$.

Како $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ има бар једну фиксну тачку у питању је осна рефлексија $\mathcal{S}_p$, за неку праву p. Из $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_O^{-1} = \mathcal{S}_O$ следи да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$. При том, тачка $O \not\in p$ (јер би иначе била фиксна за композицију $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$, а $\mathcal{I}$ нема фиксних тачака.)
$\mathcal{S}_O$ можемо представити помоћу било које две праве које се секу у O под правим углом.
Нека су зато r и q, т.д. $O \in r, q$, $r \perp p$, а затим $q \perp r$. Тада је $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q$, а $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, где је r заједничка нормала за p и q, па је $\mathcal{I}$ клизајућа рефлексија. □

Изометрија равни може се представити као композиција до три осне рефлексије. Ако је директна онда је композиција две рефлексије.
Ако је индиректна онда је или (једна) осна рефлексија или композиција три рефлексије $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$.
Ако праве a, b, c припадају једном прамену, онда је $\mathcal{I}$ (поново) осна рефлексија.

Ако праве a, b, c не припадају једном прамену онда је $\mathcal{I}$ клизајућа рефлексија. Дакле важи:

Теорема (Класификација индиректних изометрија равни)

Индиректне изометрије (апсолутне) равни су осне рефлексије и клизајуће рефлексије.

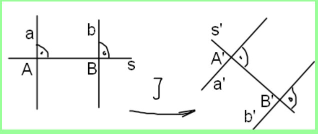
Показаће се да у еуклидској равни две праве могу да се поклапају, да се секу у једној тачки или имају заједничку нормалу, па ће директне изометрије еуклидске равни бити коинциденција, ротације и транслације.

Пример *Посматрајмо изометрију равни $\mathcal{J} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Нека су a, b нормалне на s у A и B. Тада је $\mathcal{J} = \tau_{2\overrightarrow{AB}}$. Тада*

$$\mathcal{I} \circ \tau_{2\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{I}^{-1} =$$

Пример $\ldots = (\mathcal{I}\circ\mathcal{S}_b\circ\mathcal{I}^{-1})\circ(\mathcal{I}\circ\mathcal{S}_a\circ\mathcal{I}^{-1}) =$
$\mathcal{S}_{b'}\circ\mathcal{S}_{a'} = \mathcal{J}_1$

где $\mathcal{I} : a, b \mapsto a', b'$. Нека $\mathcal{I} : s, A, B \mapsto s', A', B'$. Тад је су a' и b' ортогоналне на s' у A' и B', па је $\mathcal{J}_1 = \tau_{2\overrightarrow{A'B'}}$.



Слично, ако $a \cap b = \{O\}$, онда је $\mathcal{J} = \mathcal{R}_{O,2\measuredangle(a,b)}$, а трансформација

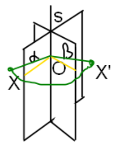
$$\mathcal{I}\circ\mathcal{R}_{O,2\measuredangle(a,b)}\circ\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{R}_{O',2\measuredangle(a',b')},$$

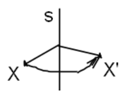
где $\mathcal{I} : a, b, O \mapsto a', b', O'$. При том је $\measuredangle(a',b') = \pm\measuredangle(a,b)$ у зависности од тога да ли је $\mathcal{I}$ директна или не.

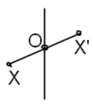
Изометрије простора. Изометрија простора може се приказати као композиција до четири раванске рефлексије. Навешћемо неке типове изометрија простора.

Директне изометрије.

1. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\beta\circ\mathcal{S}_\alpha$ и $\alpha = \beta$. Тада $\mathcal{I} = \mathcal{E}$.
2. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\beta\circ\mathcal{S}_\alpha$.



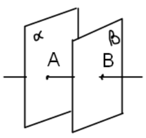




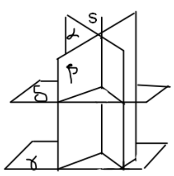
Нека $\alpha\cap\beta = s$. Фиксне тачке трансформације су тачке **осе** s. Ако $X \notin s$, нека је $\pi_X \perp s$ раван која садржи X. Ако $\mathcal{I}(X) = X'$ онда $X' \in \pi_X$. Нека $\pi_X \cap s = \{O\}$. Важи да је $OX \cong OX'$ и $\measuredangle XOX' = 2\measuredangle(\alpha,\beta)$. Трансформацију $\mathcal{I}$ називамо **осном ротацијом** и означавамо $\mathcal{R}_{s,\omega}$, где је $\omega = 2\measuredangle(\alpha,\beta)$.

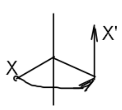
Специјално, ако је $\alpha\perp\beta$, онда је ω опружен угао, тачка O је средиште дужи XX' а тада ову трансформацију још називамо **осном симетријом** и означавамо $\mathcal{S}_s$.

3. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\beta\circ\mathcal{S}_\alpha$ и нека постоји права s,

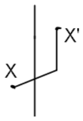


т.д. $s\perp\alpha,\beta$, која их редом сече у тачкама A и B, $A \neq B$. $\mathcal{I}$ нема фиксних тачака (јер би фиксна тачка припадала $\alpha\cap\beta$). Ако $X \in s$ и $\mathcal{I}(X) = X'$, онда је $XX' = 2AB$ и $XX' \rightrightarrows AB$. Трансформацију називамо **транслацијом простора** и означавамо $\tau_{2\overrightarrow{AB}}$.





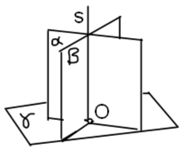
4. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\delta\circ\mathcal{S}_\gamma\circ\mathcal{S}_\beta\circ\mathcal{S}_\alpha$, где $\alpha\cap\beta = s$, $\delta,\gamma\perp s$ и нека s сече γ и δ редом у C и D. Тада је $\mathcal{I} = \tau_{2\overrightarrow{CD}}\circ\mathcal{R}_{s,2\measuredangle(\alpha,\beta)}$. Ову трансформацију зовемо **завојним кретањем** и означавамо $\mathcal{Z}_{2\overrightarrow{CD},2\measuredangle(\alpha,\beta)}$ где је $C, D \in s$. Завојно кретање нема фиксних тачака.

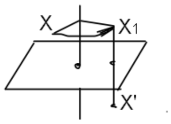


Специјално, ако је $2\measuredangle(\alpha,\beta)$ опружен угао, тј. ако је $\alpha \perp \beta$, онда трансформацију зовемо **завојним полуобртајем**, $\mathcal{Z}_{2\overrightarrow{CD}} = \tau_{2\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{S}_s$.

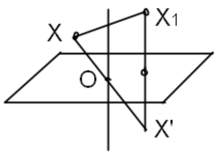
Индиректне изометрије. Индиректна изометрија је композиција 1 или три равански рефлексије.

1. Трансформација може бити $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\alpha$ **раванска рефлексија**.
2. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$

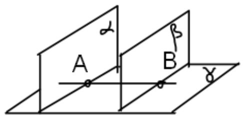


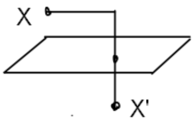


где $\alpha \cap \beta = s$ и $s \perp \gamma$. Тада је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$, где је $\omega = 2\measuredangle(\alpha,\beta)$. Ову трансформацију зовемо **осно-ротационом рефлексијом** и означавамо са $\mathcal{R}_{s,\omega,\gamma}$. Може се показати да је тачка $\{O\} = s \cap \gamma$ једина фиксна тачка изометрије.



Специјално, ако је $\alpha \perp \beta$, тј. ако је ω опружен угао, онда је O средиште дужи XX', $\mathcal{I}(X) = X'$, а трансформацију још зовемо **централном симетријом простора** и означавамо $\mathcal{S}_O$.





3. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ где су равни α и β ортогоналне на праву s равни γ у тачкама A и B, $A \neq B$. Тада је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \tau_{2\overrightarrow{AB}}$. Трансформацију зовемо **клизајућом рефлексијом простора** и означавамо $\mathcal{G}_{2\overrightarrow{AB},\gamma}$, где $A, B \in \gamma$. Клизајућа рефлексија нема фиксних тачака.

Може се показати да су наведене трансформације једине изометрије еуклидског простора.

Теорема (15.12)

Неидентичке инволуције праве, равни или простора су централне, осне и раванске рефлексије, централне симетрије равни и простора, осна симетрија простора. **БД**