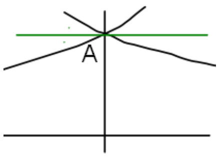
23. Аксиома Лобачевског

Нека уз аксиоме прве четири групе важи и следећа аксиома:

V-H (Аксиома Лобачевског) Постоје тачка A и права p која је не садржи такве да у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже A и дисјунктне су са p.



Геометрија изграђена помоћу аксиома прве четири групе и аксиоме V-H је **хиперболичка** геометрија, односно геометрија **Бољај-Лобачевског**.

Ако важи V-H, због 4. Лежандрове теореме постоји троугао коме је дефект строго већи од нуле, па је сваком троуглу дефект позитиван (2. Лежандрова т.), па зато важи

Теорема (30.1)

За сваку тачку A и праву p која је не садржи у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже A и дисјунктне су са p.

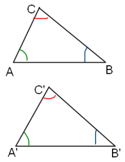
Следећи искази су еквивалентни аксиоми Лобачевског:
-угао паралелности је оштар;
-збир унутрашњих углова произвољног троугла је мањи од π;
-збир унутрашњих углова простог, равног четвороугла је мањи од 2π;
-углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су оштри;
-један угао Ламбертовог четвороугла је оштар;
-постоји права у равни оштрог угла нормална на једном његовом краку, која не сече други крак.

У хиперболичкој геометрији постоји још један став подударности троуглова.

Теорема (30.3)

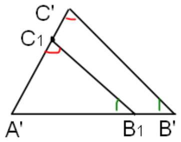
(УУУ) Два троугла су подударна акко су им подударни одговарајући углови.

Доказ. Ако су два троугла подударна, онда су им подударни и одговарајући углови. Треба показати да важи обрнуто.

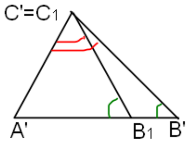


Нека су $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ т.д. $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ и $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Ако важи $AB \cong A'B'$ онда су троуглови подударни по USU.

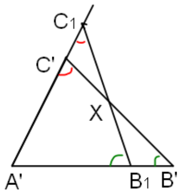
Претпоставимо да то не важи, тј. $\neg AB \cong A'B'$. Тада је једна од ове две дужи мања од друге, нпр $AB < A'B'$. Зато постоји тачка B_1 т.д. $\mathcal{B}(A', B_1, B')$ и $AB \cong A'B_1$.
Нека је C_1 тачка полуправе $A'C'$ т.д. $AC \cong A'C_1$.



(1)



(2)



(3)

Тада важи једна од релација $\mathcal{B}(A', C_1, C')$, $C' = C_1$, $\mathcal{B}(A', C', C_1)$ $(*)$.
У свим случајевима важи да је $\triangle CAB \cong \triangle C_1A'B_1$ по СУС.
Зато је и $\angle A'C_1B_1 \cong \angle ACB \cong \angle A'C'B' (**)$,
$\angle A'B_1C_1 \cong \angle ABC \cong \angle A'B'C'$.
1) Претпоставимо да је $\mathcal{B}(A', C_1, C')$. Тада је збир углова у четвороуглу $C'C_1B_1B'$ једнак 2π јер
$\angle C'C_1B_1 + \angle C_1C'B' = \angle C'C_1B_1 + \angle A'C_1B_1 = \pi$ и слично
$\angle C_1B_1B' + \angle B_1B'C' = \pi$, $(\lightning)$.
2) Претпоставимо да је $C' = C_1$. Из $\mathcal{B}(A', B_1, B')$ следи да је $\angle A'C'B_1 < \angle A'C'B'$ што је у контрадикцији са $(**)$.
3) Претпоставимо да је $\mathcal{B}(A', C', C_1)$. Тада $C_1, B_1 \div C'B'$, па C_1B_1 сече $C'B'$ у некој тачки X. Тада су подударни углови $\angle A'C'X$ и $C'C_1X$, спољашњи и несуседни унутрашњи у троуглу $\triangle C'C_1X$, $(\lightning)$.
Дакле, ниједан од случајева $(*)$ није могућ и претпоставка да је $\neg AB \cong A'B'$ је погрешна. Зато важи $AB \cong A'B'$ и троуглови су подударни. $\square$

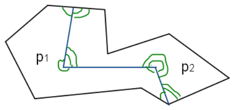
Примедба *Сетимо се да сличност "чува" углове. Ако сличност $\mathcal{P}$ слика $\triangle ABC$ у $\triangle A'B'C'$ одговарајући углови су подударни, а по претходној теореми онда су и троуглови подударни. Зато, у хиперболичкој геометрији, свака сличност је подударност.*

Нека је $A_1A_2 \dots A_n$ прост, раван полигон. Тада је збир његових унутрашњих углова строго мањи од $(n-2)\pi$.

Дефиниција

Збир унутрашњих углова простог, равног полигона $A_1A_2 \dots A_n$ је $\sigma(A_1A_2 \dots A_n)$, а **дефект** тог полигона и одговарајуће полигонске површи p је
$\delta(p) = \delta(A_1A_2 \dots A_n) = (n-2)\pi - \sigma(A_1A_2 \dots A_n)$.

Важи $0 < \delta(A_1A_2 \dots A_n) < (n-2)\pi$.



Теорема (30.5)

Ако је полигонска површ p разложена полигонском линијом на полигонске површи p_1 и p_2 онда је $\delta(p) = \delta(p_1) + \delta(p_2)$. **БД**

Теорема (30.8-10)

Троугаоне површи једнаких дефеката су међусобно разложиво подударни ликови.
Полигонске површи једнаких дефеката су разложиво подударни ликови. **БД**

Дефект полигонске површи позитиван, слаже се са разлагањем површи на "мање" полигонске површи и подударни ликови имају исти дефект.

Дефиниција

Дефект полигонске површи $\delta(p)$ је **површина** те површи.