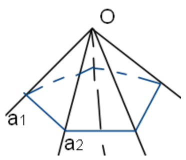
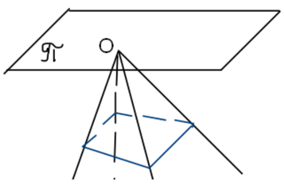
7. Рогаљ

Дефиниција

Нека су $a_1, \dots, a_n$ полуправе у простору са заједничким теменом O. Лик који се састоји из углова $\angle[a_1a_2], \angle[a_2a_3], \dots \angle[a_na_1]$, при чему свака два суседна угла нису компланарна, је **рогљаста површ**.



Полуправе a_i су **ивице**, углови $\angle[a_ia_{i+1}]$ су **стране** или **пљосни**, тачка O је **теме** те површи. Ако било које две пљосни, сем суседних, немају заједничких тачака (сем O), онда је рогљаста површ **проста**, а иначе је **сложена**.



Дефиниција

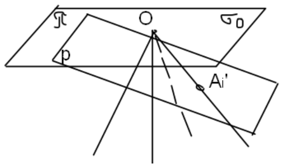
Ако постоји бар једна раван која садржи тачку O, док су све остале тачке рогљасте површи са исте стране те равни онда је рог. пов. **једнострано раширена**.

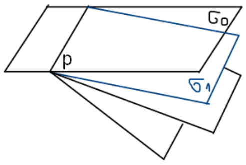
Уочимо, та раван није јединствена.

Теорема (7.1)

Постоји раван која сече све ивице и све пљосни једнострано раширене рогљасте површи $Oa_1 \dots a_n$. Тај пресек је n-тоугао. Он је прост акко је $Oa_1 \dots a_n$ проста.

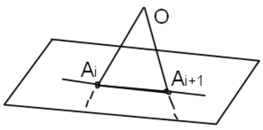
Доказ. Нека је π раван која садржи O т.д. су све остале тачке рог. површи са исте стране π. Нека је $p \subset \pi$ права, $O \notin p$ и σ_0 полураван равни π која садржи тачку O.
Нека су $A_i' \in a_i$ произвољне и σ_i полуравни са рубом p, т.д.



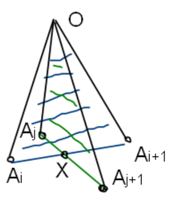


$A_i' \in \sigma_i$.
Полуравни $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ и σ_0 разлажу простор на диедре. Два од њих за пљосан имају σ_0, а један од та два је конвексан. Нека је то $\sigma_1\sigma_0$.

При том су диедри $\sigma_i\sigma_0, i \geq 2$ исто конвексни, а полураван σ_1 им свима припада. Зато, σ_1 сече произвољну отворену дуж којој су темена на пљоснима диедра $\sigma_i\sigma_0$, па сече дужи $A_i'O, i \geq 2$ у тачкама A_i. Нека је $A_1 = A_1'$. Зато раван која садржи σ_1 сече све ивице рог. површи.



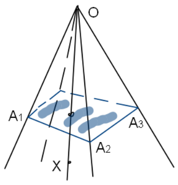
Та раван сече раван угла $A_iA_{i_1}$ по правој, а њен пресек са углом $\angle[a_ia_{i+1}]$ је дуж A_iA_{i+1}. Дакле, пресек је равни n-тоугао.



Ако n-тоугао није прост, онда се неке две несуседне ивице A_iA_{i+1} и A_jAj+1 секу у некој тачки X, која онда припада угловима $\angle a_ia_{i+1}$ и $\angle a_ja_{j+1}$, као и полуправа OX. Зато се и те несуседне пљосни секу по полуправој па и рог. површ није проста.
Обрнуто, ако рог. површ није проста, неке две несуседне пљосни се секу по полуправој која полураван σ_1 сече у некој тачки X. Тада X припада и σ_1 и $\angle a_ia_{i+1}$, тј. припада дужи A_iA_{i+1}. Слично $X \in (A_jA_{j+1})$, па се и несуседне ивице n-тоугла секу, те ни он није прост. $\square$

Дефиниција

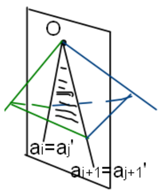
Нека тачка X не припада простој, једнострано раширеној рог. површи $Oa_1 \dots a_n$. Ако полуправа OX сече унутрашњост полигонске површи $A_1 \dots A_n$ онда је X **унутар** $Oa_1 \dots a_n$, а иначе је **изван** $Oa_1 \dots a_n$.
Скуп свих тачака унутар $Oa_1 \dots a_n$ је **унутрашњост**, а свих тачака изван $Oa_1 \dots a_n$ **спољашњост** $Oa_1 \dots a_n$.



Примедба *Раван која сече све ивице и пљосни јед. раш. рог. површи није јединствена. Може се показати да је претходна дефиниција добра, тј. не зависи од избора пресечне равни.*

Примедба *С обзиром да ни унутрашњост ни спољашњост $A_1 \dots A_n$ нису празни скупови, непразни су и унутрашњост и спољашњост $Oa_1 \dots a_n$.*

Може се показати:
- Ако су две тачке повезиве у скупу $\mathcal{S} \setminus Oa_1 \dots a_n$ онда су оне или обе унутар или обе изван $Oa_1 \dots a_n$.
-И унутрашњост и спољашњост $Oa_1 \dots a_n$ су повезани ликови.
Дакле, спољашњост и унутрашњост су две класе еквиваленције у релацији повезивости парова тачака на скупу $\mathcal{S} \setminus Oa_1 \dots a_n$.

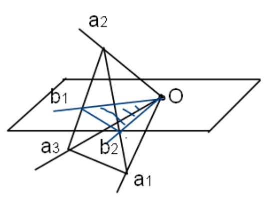


Дефиниција

Нека две рогљасте површи $Oa_1 \dots a_n$ и $Oa'_1 \dots a'_m$ имају заједничку пљосан $Oa_ia_{i+1} = Oa'_ja'_{j+1}$ која припада равни σ. Нека су остале тачке те две површи са разних страна равни σ.
Те две рог. површи су онда **надовезане**. Унија свих њихових пљосни, сем $Oa_ia_{i+1} = Oa'_ja'_{j+1}$ је поново рог. површ, за коју кажемо да је добијена **надовезивањем** почетне две.

Теорема (7.8)

Рогљаста површ добијена надовезивањем коначног низа простих, јед. раширених рог. површи, од којих су сваке две суседне међусобно надовезане, а које сем тога немају других заједничких тачака, разлаже простор на две области. **БД**



Можемо да урадимо и обрнуто. Нека је $R = Oa_1 \dots a_n$ произвољна, проста рог. површ. Нека је π раван, $O \in \pi$. π сече ту рогљасту површ по скупу полуправих којих има паран број.
Ако су то полуправе $b_1, \dots, b_{2k}$ можемо посматрати део R са једне стране равни π и углове $\angle[b_1b_2], \dots, \angle[b_{2k-1}b_{2k}]$. Они заједно такође чине једну рог. површ R_1.

Слично, углови $\angle[b_{2i-1}b_{2i}]$ и тачке површи R са друге стране равни π чине другу рогљасту површ R_2. Тада су R_1 и R_2 надовезане,а њиховим надовезивањем добијамо R.
Може се показати да сваку просту рог. површ можемо на овај начин, у коначно много корака, разложити на једнострано раширене површи.
Зато свака проста рог. површ (једн. раширена или не) $Oa_1 \dots a_n$ разлаже простор на две области.

Дефиниција

Сваку од ових области називамо **отвореним рогљем**, а површ $Oa_1 \dots a_n$ је његова **граница**. Унија отвореног рогља и његове границе је **затворени рогаљ**.

Пример *Специјално, за* $n = 3$ *рогаљ називамо* триедром.