3. Класификације изометрија у $R^n = 1, 2$

Изометрије еуклидске праве. Формуле једне изометрије праве $\mathcal{I}$ гласе

$$x' = ax + b. \tag{1}$$

При том је $A = [a]$, где је $a \in \{-1, 1\}$.

Теорема

Нека су A и B, односно A_1 и B_1, два пара различитих тачака еуклидске праве $\mathbb{R}$ и нека је $AB = A_1B_1$. Тада постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ праве $\mathbb{R}$ таква да је $\mathcal{I}(A) = A_1, \mathcal{I}(B) = B_1$.

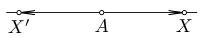
Доказ. Нека је $x' = ax + b$ једначина трансформације $\mathcal{I}$. Тада су a и b решења система

$$ax(A) + b = x(A_1),$$
$$ax(B) + b = x(B_1).$$

При том је детерминанта система једнака $(x(A) - x(B)) \neq 0$, те постоји јединствено решење по a, b. Даље како је $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|$ одузимањем ових једначина следи да је $a \in \{-1, 1\}$ односно да је $\mathcal{I}$ изометрија. $\square$

Примедба *У претходном доказу смо видели да је линеарно пресликавање праве на јединствен начин одређено сликама произвољне две тачке A и B те праве. Уколико су још дужи AB и њена слика једнаке, пресликавање је изометрија.*

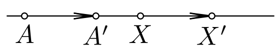
Посматрајмо једначину (1).
1. Ако је $a = -1$, $\lambda = 1$ није сопствена вредност матрице A па $\mathcal{I}$ има тачно једну инваријантну тачку A, а за јединични вектор $\imath$ важи $\overline{\mathcal{I}}(\imath) = -\imath$.



Зато се произвољна тачка праве X слика у тачку X' такву да је $\overrightarrow{XA} = -\overrightarrow{X'A}$, те је A средиште дужи XX'. Ову трансформацију називамо **централном рефлексијом праве** и означавамо $\mathcal{S}_A$. Централна рефлексија је индиректна трансформација.

2а. Нека је сада $a = 1$. У овом случају ради се о директној изометрији.

Тада важи $\overline{\mathcal{I}}(\imath) = \imath$. Ако $\mathcal{I}$ има бар једну инваријантну тачку A, тада за произвољну тачку X праве и њену слику X' важи да је $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AX'}$, па је и $X' = X$, односно $\mathcal{I} = \varepsilon$.
2б. Ако $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, тада је $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathcal{J}$,



где изометрија $\mathcal{J}$ има исти коефицијент $a = 1$ и бар једну инваријатнту тачку, па је коинциденција. Изометрија $\mathcal{I}$ је тада композиција транслације и коинциденције, односно транслација τ_v. При том, уочимо да је за $v = \overrightarrow{0}$, $\tau_v = \varepsilon$, па коинциденцију можемо сматрати транслацијом за вектор $\overrightarrow{0}$.

Изометрије праве

изометрија	инв. тачке	директност
ε	све	+
τ_v	0	+
$\mathcal{S}_A$	1	−

Тврђење

а) Композиција две централне рефлексије праве је транслација или коинциденција, односно важи $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \tau_{2\overrightarrow{AB}}$.
б) Композиција две транслације праве је транслација или коинциденција, односно важи $\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$.
в) Композиција транслације праве и централне рефлексије је централна рефлексија праве.

Доказ. а) Композиција две индиректне трансформације, централне рефлексије праве, је директна трансформација, дата је формулом $x' = x + b$, те је транслација τ_b (специјално сматрамо да је $\varepsilon = \tau_0$). Вектор транслације је једнак $\overrightarrow{AA'}$, где је $A' = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A(A)$ слика тачке A, па важи $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$.
б) Композиција две директне изометрије је директна, па је у питању транслација. Како постоје тачке A, B, C такве да је $v = \overrightarrow{AB}, u = \overrightarrow{BC}$ и при том важи да је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ тврђење директно важи.
в) Композиција директне и индиректне изометријске трансформације праве је индиректна трансформација, тј. централна рефлексија. Зато је $\tau_v \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B$. При том, како је $\mathcal{S}_A^{-1} = \mathcal{S}_A$ следи да је $\tau_v = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \tau_{2\overrightarrow{AB}}$, па је тачка B таква да је $\overrightarrow{AB} = v/2$. □

Следеће тврђење директно следи.

Теорема

Произвољна изометрија $\mathcal{I}$ еуклидске праве $\mathbb{R}$ може се представити као композиција до две централне рефлексије.

Нека је изометрија равни $\mathcal{I}$ дата формулама $X' = AX + B$.

Теорема

Нека су A, B, C односно A_1, B_1, C_1, два тројке неколинеарних тачака еуклидске равни $\mathbb{R}^2$ и нека је $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$. Тада постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ равни $\mathbb{R}^2$ таква да је $\mathcal{I}(A) = A_1, \mathcal{I}(B) = B_1, \mathcal{I}(C) = C_1$.

Доказ. Тражимо трансформацију $\mathcal{I} : X' = AX + B$. Нека су координате квадратне матрице A дате са $a_{ij}, i, j = 1, 2$, а координате колоне B са b_1, b_2.

Тада се услов да $\mathcal{I}$ слика A, B, C у A_1, B_1, C_1 своди на два система једначина по $a_{i1}, a_{i2}, b_i, i = 1, 2$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1(A) + a_{i2}x_2(A) + b_i &= x_i'(A), \\ a_{i1}x_1(B) + a_{i2}x_2(B) + b_i &= x_i'(B), \\ a_{i1}x_1(C) + a_{i2}x_2(C) + b_i &= x_i'(C), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Детерминанте оба система су исте и једнаке

$$\det \begin{bmatrix} x_1(B) - x_1(A) & x_2(B) - x_2(A) \\ x_1(C) - x_1(A) & x_2(C) - x_2(A) \end{bmatrix}.$$

Како су вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ неколинеарни и дати са $(x_1(B) - x_1(A), x_2(B) - x_2(A))$ и $(x_1(C) - x_1(A), x_2(C) - x_2(A))$, детерминанта је различита од нуле, па постоји јединствена матрица A и колона B које испуњавају овај услов.

При том, како је, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{A_1C_1}\|$ и $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{B_1C_1}\|$ следи и да је $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1} \circ \overrightarrow{A_1C_1}$.
Тада је

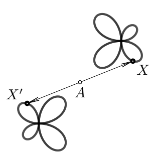
$$\overline{\mathcal{I}}\Big(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\Big) = \frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\|\overrightarrow{A_1B_1}\|},$$

$$\overline{\mathcal{I}}\Big(\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} \circ \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|})\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\Big) = \Big(\overrightarrow{A_1C_1} - (\overrightarrow{A_1C_1} \circ \frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\|\overrightarrow{A_1B_1}\|})\frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\|\overrightarrow{A_1B_1}\|}\Big),$$

па $\overline{\mathcal{I}}$ слика ортонормирану базу равни која се добија Грам-Шмитовим поступком од $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ у ортонормирану базу која се добија од $\{\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\}$. Зато је матрица пресликавања A ортонормирана, па је $\mathcal{I}$ изометрија. $\square$

Из доказа претходне теореме следи да је линеарна трансформација равни одређена на јединствен начин сликама три неколинеарне тачке A, B, C, а у питању је изометрија ако и само се дужи AB, BC и CA сликају у себи једнаке дужи.

Нека је $\mathcal{I}$ изометријска трансформација $\mathbb{R}^2$. Матрица A је квадратна, па може имати или две реалне сопствене вредности или две конјуговано комплексне.
1. Претпоставимо, прво да је $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Тада $\mathcal{I}$ има тачно једну инваријантну тачку A.



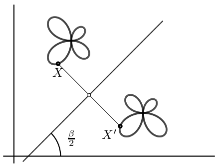
Сваки вектор одговарајућег векторског простора је сопствени за сопствену вредност $\lambda = -1$. Зато, ако се произвољна тачка X слика у X' важи да је $\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{AX'}$, те је A средиште дужи XX'.

Ову трансформацију називамо **централном симетријом равни** и означавамо $\mathcal{S}_A$. Како је сопствени потпростор за $\lambda = -1$ дводимензион, централна симетрија равни је директна трансформација.
2. Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ онда, слично као у случају еуклидске праве, у питању је директна трансформација.

2а.коинциденција равни ε уколико постоји бар једна инваријантна тачка

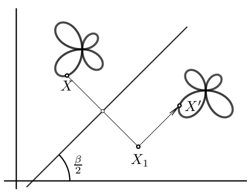
2б.транслација τ_v уколико инваријантних тачака нема.

3. Нека је сада $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Тада је у питању индиректна трансформација и матрица пресликавања је облика S_β.
Уочимо да је јединични сопствени вектор за $\lambda_1 = 1$ дат са $v_1 = (\cos\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\beta}{2})$, односно да одређује оријентисани угао $\frac{\beta}{2}$ са x_1-осом.
3а. Ако изометријска трансформација има бар једну инваријантну тачку A онда су инваријантне и све тачке праве p која садржи тачку A и одређена је вектором v_1, односно одређује угао $\frac{\beta}{2}$ са x_1-осом.



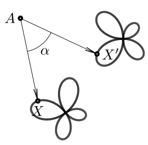
Нека је X произвољна тачка равни која не припада p и $X_0 \in p$, таква да су праве XX_0 и p ортогоналне. С обзиром да су сопствени вектори за разне сопствене вредности међусобно ортогонални, следи да је вектор $\overrightarrow{XX_0}$ сопствени за $\lambda_2 = -1$.

При том, $\mathcal{I}(X_0) = X_0$, па ако је $\mathcal{I}(X) = X'$, важи да је $\overrightarrow{XX_0} = -\overrightarrow{X'X_0}$, односно тачка X_0 је средиште дужи XX'. Ову трансформацију називамо **осном рефлексијом равни** у односу на праву p и означавамо $\mathcal{S}_p$.
3б.



Ако трансформација нема инваријантних тачака тада је $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathcal{S}_p$, где је v вектор паралелан правој p, а трансформацију називамо **клизајућом рефлексијом равни** и означавамо $\mathcal{G}_{p,v}$.

4. Ако су λ_1 и λ_2 конјуговано комплексне сопствене вредности, изометрија $\mathcal{I}$ има тачно једну инваријантну тачку A.



При том, матрица пресликавања је облика $R_{-\alpha}$, за неко $\alpha \in R$. Ако се произвољна тачка X равни слика у X', важи $\overline{\mathcal{I}}(\overrightarrow{AX}) = \overrightarrow{AX'}$, те је оријентисани угао између $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{AX'}$ једнак α. Ову трансформацију називамо **централном ротацијом равни** око тачке A за угао α и означавамо $\mathcal{R}_{A,\alpha}$. Уочимо да је $\mathcal{S}_A = \mathcal{R}_{A,\pi}$.

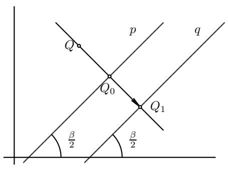
Изометрије равни

изометрија	инв. тачке	сопс. вредности	директност
ε	све	$\lambda_{1,2} = 1$	+
τ_v	$\varnothing$	$\lambda_{1,2} = 1$	+
$\mathcal{S}_p$	$P \in p$	$\lambda_{1,2} = \pm 1$	−
$\mathcal{G}_{p,v}$	$\varnothing$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$	−
$\mathcal{R}_{A,\alpha}$	A	$\lambda_{1,2} = e^{\pm\imath\alpha}$	+
$\mathcal{S}_A = \mathcal{R}_{A,\pi}$	A	$\lambda_{1,2} = -1$	+

Теорема

Произвољна изометрија $\mathcal{I}$ еуклидске равни $\mathbb{R}^2$ може се представити као композиција до три осне рефлексије.

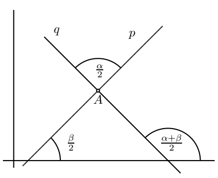
Доказ. Ако је $\mathcal{I} = \varepsilon$ тада за произвољну праву p равни $\mathbb{R}^2$ важи $\varepsilon = \mathcal{S}_p^2$.
Нека је $\mathcal{I} = \tau_v$ транслација. Нека је, даље, p произвољна права равни $\mathbb{R}^2$ ортогонална на правац вектора v, $Q_0 \in p$, Q_1 таква да је $\overrightarrow{Q_0Q_1} = \frac{v}{2}$ и $Q = \mathcal{S}_p(Q_1)$.



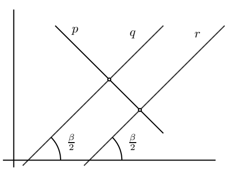
Тада је $\overrightarrow{QQ_1} = v$. Посматрајмо трансформацију $\tau_v \circ \mathcal{S}_p$. Ако је матрица рефлексије $\mathcal{S}_p$ дата са S_β, онда је она уједно и матрица пресликавања $\tau_v \circ \mathcal{S}_p$. При том $\tau_v \circ \mathcal{S}_p(Q_1) = \tau_v(Q) = Q_1$, па ова трансформација има и бар једну инваријантну тачку Q_1.

Зато је $\tau_v \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$ осна рефлексија, где $Q_1 \in q$. При том праве p и q одређују са осом x_1 исти оријентисани угао $\frac{\beta}{2}$ те су паралелне. Сада важи $\tau_v = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.

Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{A,\alpha}$ ротација. Нека је даље p произвољна права равни $\mathbb{R}^2$ таква да $A \in p$. Матрице изометрија $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ и $\mathcal{S}_p$ су редом, $R_{-\alpha}$ и S_β. Зато је матрица композиције $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{S}_p$ дата са $S_{\beta+\alpha}$.

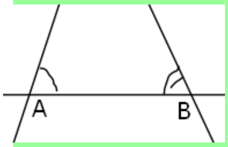


Важи и да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{S}_p(A) = A$, па ова композиција има и бар једну инваријантну тачку. Зато је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$ осна рефлексија, где $A \in q$. При том, оријентисани угао између x_1-осе и праве q је $\frac{\beta+\alpha}{2}$. Зато је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, где је оријентисани угао између p и q једнак $\frac{\alpha}{2}$.



Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{p,v} = \tau_v \circ \mathcal{S}_p$ и нека су q и r две праве ортогоналне на p такве да је $\tau_v = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q$. Тада је $\mathcal{G}_{p,v} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. □

Пример *Нека су* $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ *и* $\mathcal{R}_{B,\beta}$ *две ротације равни и нека је* p *права која садржи тачке* A *и* B. *Ако је* $A \neq B$ *таква права је јединствена. Нека су даље* q *и* r *праве такве да је* $A \in q$, $B \in r$ *и нека су оријентисани углови између* p *и* q, *односно* r *и* p, *редом једнаки* $\frac{\alpha}{2}$ *и* $\frac{\beta}{2}$. *Тада је* $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r$, *па је* $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$.



Ако збир углова $\frac{\alpha}{2}$ *и* $\frac{\beta}{2}$ *није једнак опруженом углу, праве* q *и* r *су две разне праве које се секу у некој тачки* C *(ако је* $A = B$ *онда је и* $C = A$*) и при том је оријентисани угао између* r *и* q *једнак* $\frac{\alpha+\beta}{2}$. *Тада је* $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$.

Ако је $\frac{\alpha+\beta}{2}$ *једнак опруженом углу тада су праве* q *и* r *паралелне. При том, ако је* $A = B$ *оне се поклапају и* $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \varepsilon$, *а ако је* $A \neq B$ *оне су дисјунктне и* $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \tau_v$ *је транслација.*