9. Пројективне трансформације

Дефиниција

Нека је у пројективном простору $\mathbb{R}P^n$ дат систем хомогених координата $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$. Пресликавање σ које је у датом координатном систему дато формулама

$$\lambda X' = AX, \tag{1}$$

где је A недегенерисана, квадратна матрица реда $(n+1)$ је **пројективна трансформација** простора $\mathbb{R}P^n$.

С обзиром да тачке имају хомогене координате, као и у случају формула промене тих координата, неопходно је узети у обзир да су кординате AX сразмерне са једном $(n+1)$-торком координата тачке X', отуд и коефицијент λ у формулама.

С обзиром да је $\det A \neq 0$ директно следи и да је σ бијективно пресликавање. При том, две пропорционалне матрице A и $kA, k \neq 0$ одређују исто пројективно пресликавање.
Уколико је са $\mu Y = QX$ дата промена хомогених координата, тада је пресликавање σ у другим координатама дато са $\nu Y' = QAQ^{-1}Y$, односно одређено је матрицом QAQ^{-1}.

Пример *Пројективно пресликавање одређено јединичном матрицом E је идентичко.*

Тврђење

Скуп свих пројективних трансформација простора $\mathbb{R}P^n$ је група у односу на композицију функција.

Доказ. Једноставно је проверити да важе аксиоме групе. □

Групу пројективних трансформација n-димензионог пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ означавамо са PGL_n.
Нека су a_{ij} коефицијенти матрице A. Тада је пројективна трансформација дата следећим једначинама:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1(n+1)}x_{n+1},\\
\lambda x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2(n+1)}x_{n+1},\\
&\vdots\\
\lambda x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n(n+1)}x_{n+1},\\
\lambda x_{n+1}' &= a_{(n+1)1}x_1 + a_{(n+1)2}x_2 + \cdots + a_{(n+1)(n+1)}x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Можемо поделити првих n једначина последњом.

Ако означимо одговарајуће афине координате $\overline{x}_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ добијамо формуле датог пресликавања у афиним координатама

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1' &= \frac{a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + \cdots + a_{1n}\overline{x}_n + a_{1(n+1)}}{a_{(n+1)1}\overline{x}_1 + a_{(n+1)2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{(n+1)n}\overline{x}_n + a_{(n+1)(n+1)}},\\
\overline{x}_2' &= \frac{a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + \cdots + a_{2n}\overline{x}_n + a_{2(n+1)}}{a_{(n+1)1}\overline{x}_1 + a_{(n+1)2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{(n+1)n}\overline{x}_n + a_{(n+1)(n+1)}},\\
&\vdots\\
\overline{x}_n' &= \frac{a_{n1}\overline{x}_1 + a_{n2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{nn}\overline{x}_n + a_{n(n+1)}}{a_{(n+1)1}\overline{x}_1 + a_{(n+1)2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{(n+1)n}\overline{x}_n + a_{(n+1)(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Приметимо да за $a_{(n+1)1} = a_{(n+1)2} = \cdots = a_{(n+1)n} = 0$ добијамо формуле афиног пресликавања. При том, тада је $a_{(n+1)(n+1)} \neq 0$, а с обзиром да сразмерне матрице одређују исто пројективно пресликавање, можемо сматрати да је $a_{(n+1)(n+1)} = 1$, односно да је

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Тада је одговарајућа афина трансформација $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \mapsto (\overline{x}_1', \ldots, \overline{x}_n')$ дата формулама $X' = A_1X + B$.
При том, уочимо да се пројективним пресликавањем одређеним матрицом (2) бесконачно далеке тачке, где је $x_{n+1} = 0$, сликају у бесконачно далеке, $x_{n+1}' = 0$, односно да је бесконачно далека хиперраван инваријантна у овом пресликавању.

Важи и обрнуто: ако је беконачно далека хиперраван инваријантна за пресликавање σ тада је одговарајућа матрица пресликавања сразмерна матрици (2), па је и дато пресликавање, у афиним координатама, афино.
Сетимо се и да појам бесконачно далеке хиперравни зависи искључиво од одабраног система хомогених координата. У неком другом систему координата иста хиперраван је коначна, али и даље инваријантна за пресликавање σ. Зато важи следећа теорема.

Тврђење

Група пројективних трансформација пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ код којих је дата хиперраван инваријантна изоморфна је групи афиних трансформација афиног простора $\mathcal{A}^n$.

Дакле, група $Aff(\mathbb{R}^n)$ је подгрупа групе PGL_n.

Теорема

Постоји јединствена пројективна трансформација простора $\mathbb{R}P^n$ која слика базне тачке у датих $(n+2)$ тачке од којих су сваких $(n+1)$ тачака у општем положају. **БД**

Сада директно следи да је једна пројективна трансформација простора $\mathbb{R}P^n$ одређена са $(n+2)$ тачке од којих су сваких $(n+1)$ у општем положају и њиховим сликама.

Приметимо да уколико важи да је $\sigma(P) = P_1$ следи да се вектор $\overrightarrow{OP}$ линеарним пресликавањем којем одговара матрица A слика у вектор колинеаран са $\overrightarrow{OP_1}$.
Зато ако се пројективним пресликавањем σ тачке A, B, C, D сликају у A_1, B_1, C_1, D_1, постоје вектори који одговарају овим тачкама за које важи да је $A : \overrightarrow{A} \mapsto \overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{B} \mapsto \overrightarrow{B_1}$, $\overrightarrow{C} \mapsto \overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{D} \mapsto \overrightarrow{D_1}$.

Претпоставимо да тачке C и D припадају правој AB. Тада постоје коефицијенти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такви да је $\overrightarrow{C} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{D} = \gamma\overrightarrow{A} + \delta\overrightarrow{B}$.
Како је пресликавање вектора одређено матрицом A линеарно добијамо да је тада и $\overrightarrow{C_1} = \alpha\overrightarrow{A_1} + \beta\overrightarrow{B_1}$, $\overrightarrow{D_1} = \gamma\overrightarrow{A_1} + \delta\overrightarrow{B_1}$. Тада, очигледно, тачке C_1, D_1 припадају правој A_1B_1. Добијамо и да важи следећа теорема.

Теорема

а) Пројективна трансформација слика праве у праве, k-димензионе пројективне потпросторе у k-димензионе пројективне потпросторе.
б) Ако су A_1, B_1, C_1, D_1 слике тачака A, B, C, D у пројективној трансформацији, тада је $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$.

Нека је пројективна трансформација σ дата формулама $\lambda X' = AX$.
Ако је тачка M инваријантна у овој тансформацији следи да су координате AM сразмерне са координатама тачке M, односно да су решења једначине $(A - \lambda E)X = 0$.
При том, те координате не могу бити све једнаке нули. Зато, ако је $\overrightarrow{M}$ један од вектора који одговара тачки M, следи да је $\overrightarrow{M}$ сопствени за линеарно пресликавање A.
Геометријски гледано, матрица A дефинише линеарно пресликавање векторског простора R^{n+1}, тачка M је инваријантна ако се вектор $\overrightarrow{M}$, који је колинеаран са $\overrightarrow{OM}$ слика у вектор који је такође колинеаран са $\overrightarrow{OM}$, односно ако је $\overrightarrow{M}$ сопствени вектор пресликавања.