ОБЛАСТ ПРИВЛАЧЕЊА ФРЕШЕОВЕ РАСПОДЕЛЕ

Довољне услове при којима апсолутно непрекидна функција расподеле припада области привлачења $D(G_{1,\alpha})$ формулисао је von Mises (1936), а једноставне потребне и довољне услове у општем случају добио је Gnedenko (1943. Ове резултате дајемо у следећим двема теоремама.

Теорема 1. [von Mises (1936)] *Нека је F апсолутно непрекидна функција расподеле са густином расподеле f. Ако важе услови*

(а) $f(x) > 0$ за све $x \geqslant x_0$ и

(б) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t\,f(t)}{1-F(t)} = \alpha > 0,$

онда важи $F \in D(G_{1,\alpha})$.

Теорема 2. [Gnedenko (1943)] *Функција расподеле F припада области привлачења $D\left(G_{1,\alpha}\right)$ ако и само ако су испуњени услови:*

(а) $x_F = \sup\{t : F(t) < 1\} = +\infty$*;*

(б) $1 - F \in \text{ПП}_{-\alpha}$*, тј. за свако $x > 0$ важи једнакост*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \quad \text{\textit{где је}}\ \ \alpha > 0. \tag{1}$$

У том случају при $n \to \infty$ важи $F^n(a_n x) \to G_{1,\alpha}(x)$, где је

$$a_n = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{-1}(n) = \inf\left\{x : F(x) \geqslant 1 - \frac{1}{n}\right\}. \tag{2}$$

Наводимо неколико примера функција расподеле које припадају области привлачења Фрешеове расподеле $D(G_{1,\alpha})$.

Пример 1. *Фрешеова расподела.* Функција $G_{1,\alpha}$ припада својој области привлачења $D(G_{1,\alpha})$, јер за сваки природан број n и сваки реалан број x важи једнакост

$$G_{1,\alpha}^n(n^{1/\alpha}x) = G_{1,\alpha}(x).$$

Нормирајуће константе дате су са $a_n = n^{1/\alpha}$ и $b_n = 0$. $\triangle$

Пример 2. *Паретова расподела.* Нека је

$$F(x) = 1 - kx^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,\ k > 0,\ x \geqslant k^{1/\alpha}, \tag{3}$$

и $F(x) = 0$ за $x < k^{1/\alpha}$. Тада је

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{k(tx)^{-\alpha}}{kt^{-\alpha}} = x^{-\alpha},$$

па на основу теореме 2. следи $F \in D(G_{1,\alpha})$. Осим тога,

$$\begin{aligned} P\{M_n \leqslant (kn)^{1/\alpha}x\} &= F^n((kn)^{1/\alpha}x) = (1 - k(kn)^{-1}x^{-\alpha})^n \\ &= \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^n \to \exp(-x^{-\alpha}), \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

тј. нормирајуће константе су дате са $a_n = (kn)^{1/\alpha}$ и $b_n = 0$. $\triangle$

Пример 3. *Кошијева расподела.* Нека је

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x. \tag{4}$$

Тада за $x > 0$ при $t \to +\infty$ важи

$$\begin{aligned} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(tx)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(tx)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t} \to \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Заиста, уводећи смену $\operatorname{arctg} t = \pi/2 - \vartheta$, добијамо $t = \operatorname{tg}(\pi/2 - \vartheta) = \operatorname{ctg}\vartheta$, па даље следи

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right)\cdot t = \lim_{\vartheta\to 0} \vartheta \operatorname{ctg}\vartheta = 1,$$

и аналогно

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(tx)\right)tx = 1.$$

На основу тога лако добијамо (5), тј. $F \in D(G_{1,1})$. Нормирајуће константе су a_n и $b_n = 0$, при чему константу a_n одређујемо из услова

$$1 - F(a_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} a_n = \frac{1}{n}.$$

Дакле, $a_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$. За сваки $x > 0$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{M_n \leqslant x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right\} = \lim_{n\to\infty} F^n\left(x\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right) = e^{-x^{-1}}.$$

ОБЛАСТ ПРИВЛАЧЕЊА ВЕЈБУЛОВЕ РАСПОДЕЛЕ

У овом одељку формулишемо услове при којима дата функција расподеле припада области привлачења Вејбулове расподеле и то, довољне услове за апсолутно непрекидне расподеле и потребне и довољне услове у општем случају.

Теорема 1. [von Mises (1936)] *Нека је F апсолутно непрекидна функција расподеле са густином расподеле f. Ако важе услови*

(а) $x_F = \sup\{t : F(t) < 1\} < +\infty$,

(б) $f(x) > 0$ за све $x \in (a, x_F)$, $f(x) = 0$ за $x > x_F$,

(в) $\lim\limits_{t \uparrow x_F} \dfrac{(x_F - t)f(t)}{1 - F(t)} = \alpha$, где је $\alpha > 0$,

онда важи $F \in D(G_{2,\alpha})$.

Теорема 2. [Gnedenko (1943)] *Функција расподеле F припада области привлачења $D\left(G_{2,\alpha}\right)$ ако и само ако су испуњени услови:*

(а) $x_F = \sup\{t : F(t) < 1\} < +\infty$ *и*

(б) $1 - F\left(x_F - \frac{1}{x}\right) \in \text{ПП}_{-\alpha}$ *при* $x \to +\infty$.

У том случају за свако $x < 0$ важи једнакост

$$\lim_{n\to\infty} F^n((x_F - \gamma_n)x + x_F) = G_{2,\alpha}(x), \tag{1}$$

где је константа γ_n дата са

$$\gamma_n = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{-1}(n) = \inf\left\{s : \frac{1}{1-F(s)} \geqslant n\right\}. \tag{2}$$

Напомена. Услов (б) може се записати у еквивалентном облику на следећи начин:

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1 - F(x_F - hx)}{1 - F(x_F - h)} = x^{\alpha}, \quad \text{за све } x > 0. \tag{3}$$

Пример 1. *Вејбулова расподела.* Функција расподеле $G_{2,\alpha}$ припада својој области привлачења $D(G_{2,\alpha})$, јер за сваки природан број n и сваки реалан број x важи једнакост

$$G^n_{2,\alpha}(n^{-1/\alpha}x) = G_{2,\alpha}(x).$$

Нормирајуће константе дате су са $a_n = n^{-1/\alpha}$ и $b_n = 0$. $\triangle$

Пример 2. *Равномерна расподела на интервалу* $[0, c]$. Нека је функција расподеле F дата са

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < 0, \\ x/c, & \text{ako je } 0 \leqslant x \leqslant c, \\ 1, & \text{ako je } x > c, \end{cases} \tag{4}$$

где је $c > 0$. Лако се проверава да за свако $x > 0$ важи

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - F(x_F - tx)}{1 - F(x_F - t)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - (c - tx)/c}{1 - (c - t)/c} = x.$$

Према томе, $F \in D(G_{2,1})$. $\triangle$

Пример 3. Нека је функција расподеле F дата са

$$F(x) = \frac{2cx - x^2}{c^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant c, \tag{5}$$

и $F(x) = 0$ за $x < 0$, односно $F(x) = 1$ за $x > c$. За свако $x > 0$ важи

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - F(c - tx)}{1 - F(c - t)} = x^2,$$

па следи да је $F_1 \in D(G_{2,2})$. $\triangle$

ОБЛАСТ ПРИВЛАЧЕЊА ГУМБЕЛОВЕ РАСПОДЕЛЕ

Нека је F функција расподеле и $x_F = \sup\{t : F(t) < 1\}$. Из карактеризација области привлачења Фрешеове и Вејбулове расподеле следи да за све функције расподеле $F \in D(G_{1,\alpha})$ важи $x_F = +\infty$, а за све функције расподеле $F \in D(G_{2,\alpha})$ важи $x_F < +\infty$. Област привлачења Гумбелове расподеле $D(G_0)$ садржи и функције за које важи $x_F = +\infty$ и функције за које важи $x_F < +\infty$. Као и у претходним случајевима формулисаћемо довољне, а такође потребне и довољне услове при којима функција расподеле F припада $D(G_0)$.

Теорема 1. [von Mises (1936)] *Нека је F апсолутно непрекидна функција расподеле са густином f и $x_F = \sup\{t : F(t) < 1\} \leqslant \infty$. Ако су испуњени услови*

(а) $f'(x) < 0$ *за све x из неког интервала* (a, x_F),

(б) $f(x) = 0$ *за* $x \geqslant x_F$,

(в) $\lim\limits_{t \uparrow x_F} \dfrac{f'(t)(1 - F(t))}{(f(t))^2} = -1$,

онда важи $F \in D(G_0)$.

Б.В. Гнеденко је дао и прву карактеризацију области привлачења Гумбелове расподеле у раду из 1943. године. Пошто Гнеденкова карактеризација, како је сам писао, није била коначна и проста за примене, тај проблем је касније више пута био поново разматран. Разлог је тај што Гнеденков резултат садржи помоћну функцију која се појављује у аргументу функције расподеле F за коју се захтева одређени услов. У раду Mejzler (1949) дата је карактеризација области $D(G_0)$ у терминима уопштеног инверза функције расподеле F, при условима који се односе само на ту функцију. У радовима Marcus, Pinsky (1969) и Balkema, de Haan (1972) такође је проучавана ова проблематика. У радовима de Haan (1970, 1971, 1976) дата је релативно једноставна карактеризација области привлачења $D(G_0)$, у терминима саме функције расподеле F.

Следећу теорема је компилација резултата из радова Gnedenko (1943), Mejzler (1949) и de Haan (1970).

Теорема 2. [Gnedenko (1943), Mejzler (1949), de Haan (1970)] *Нека је F функција расподеле, $x_F = \sup\{t : F(t) < 1\}$ и*

$$H(x) = \frac{1}{1 - F(x)} \quad \text{za} \;\; x < x_F. \tag{1}$$

Тада су еквивалентни следећи услови:

(а) *$F \in D(G_0)$, тј. постоје низови константи $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, такви да за сваки реалан број x важи једнакост*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = e^{-e^{-x}}. \tag{2}$$

(б) *$H \in \Gamma$, тј. постоји функција $g : (c, x_F) \to \mathbb{R}_+$, таква да за сваки реалан број x важи једнакост*

$$\lim_{t\uparrow x_F} \frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}. \tag{3}$$

(в) *$H^{-1} \in \Pi$, тј. постоји функција $a : (c, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, таква да за свако $x > 0$ важи једнакост*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H^{-1}(tx) - H^{-1}(t)}{a(t)} = \ln x. \tag{4}$$

Пример 1. *Гумбелова расподела.* Доказаћемо да функција расподеле G_0 припада својој области привлачења $D(G_0)$. Заиста, како је

$$G_0^n(x) = \Big\{\exp(-e^{-(x+\ln n)})\Big\}^n,$$

то добијамо да је $G_0^n(x + \ln n) = G_0(x)$. Према томе, за $a_n = 1$ и $b_n = \ln n$ важе једнакости

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = \lim_{n\to\infty} G_0^n(a_n x + b_n) = G_0(x).$$

Лако се проверава да је $g(t) = 1$ помоћна функција из услова (б) теореме 2. $\triangle$

Пример 2. *Експоненцијална расподела* са параметром $\lambda > 0$. Функција расподеле $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$, припада области $D(G_0)$. Помоћна функција је дата са $g(t) = \frac{1}{\lambda}$, а нормирајуће константе су

$$a_n = \frac{1}{\lambda}, \quad b_n = \frac{1}{\lambda} \ln n. \quad \triangle$$

Пример 3. *Нормална расподела.* Густина стандардне нормалне расподеле са параметрима 0 и 1 и функција расподеле дате су са

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

У даљем ћемо користити следећу асимптотску релацију

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}, \quad x \to \infty. \tag{5}$$

На основу (5.8.12) добијамо да је

$$\begin{aligned} \frac{1 - \Phi(t + xg(t))}{1 - \Phi(t)} &= \frac{e^{-(t+xg(t))^2/2}}{t + xg(t)} \cdot \frac{t}{e^{-t^2/2}} (1 + o(1)) \\ &= \frac{t}{t + xg(t)} e^{-txg(t)} e^{-x^2 g^2(t)/2} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

За $g(t) = 1/t$, $t > 0$, добијамо да је

$$\begin{aligned} \frac{1 - \Phi(t + xg(t))}{1 - \Phi(t)} &= \frac{t^2}{t^2 + x} e^{-x} e^{-x^2/(2t^2)} (1 + o(1)) \\ &\to e^{-x}, \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{6}$$

На основу теореме 2 из (6) добијамо да $\Phi \in D(G_0)$.

Преостаје још да одредимо нормирајуће константе a_n и b_n. Нека је x фиксиран број. Одредимо $u_n = a_n x + b_n$ из услова:

$$1 - \Phi(u_n) \sim \frac{e^{-x}}{n}, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Користећи асимптотске релације (5) и (7) добијамо да при $n \to \infty$ важи $\dfrac{e^{-x}}{n} \cdot \dfrac{u_n}{\varphi(u_n)} \to 1$, одакле следи

$$-x - \ln n + \ln u_n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} u_n^2 \to 0. \tag{8}$$

Јасно је да $u_n \to \infty$ при $n \to \infty$, па из (8) следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{2 \ln n} = 1. \tag{9}$$

Из (9) следи да је $\ln u_n = \dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln\ln n) + o(1)$, па даље из (8) добијамо да при $n \to \infty$ важи

$$\frac{u_n^2}{2} = x + \ln n - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln\ln n - \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1),$$

одакле следи

$$u_n^2 = 2\ln n \left\{1 + \frac{x - \frac{1}{2}(\ln 4\pi + \ln\ln n)}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right\},$$

односно

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{2\ln n}\left\{1 + \frac{x - \frac{1}{2}(\ln 4\pi + \ln\ln n)}{2\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right\}, \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\ln n}} + \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Такође је јасно да ако је константа u_n дата са (9), онда важи (7). Из релације (7) и теореме о вези асимптотског понашања максимума и репа расподеле случајних величина чији се максимум посматра, добијамо да за

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln n}}, \tag{11}$$

$$b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}}, \tag{12}$$

и сваки реалан број x, важи $\lim\limits_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = \exp(-e^{-x})$. $\triangle$

Пример 4. Функција расподеле

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{1/x}, & \text{ako je } x < 0, \\ 1, & \text{ako je } x \geqslant 0, \end{cases}$$

припада области $D(G_0)$. Лако се проверава да помоћна функција g из теореме 2 може бити изабрана тако да је $g(t) = t^2$, за $-\infty < t < 0$. Константа u_n за коју при $n \to \infty$ важи $1 - F(u_n) \sim e^{-x}/n$, односно $e^{1/u_n} \sim e^{-x}/n$, може се изабрати тако да је $1/u_n = -x - \ln n$, тј.

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{1}{x + \ln n} = -\frac{1}{\ln n}\left(1 + \frac{x}{\ln n}\right)^{-1} \\ &= \frac{x}{(\ln n)^2} - \frac{1}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)^2. \end{aligned}$$

Према томе, $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^2}$ и $b_n = -\dfrac{1}{\ln n}$ су нормирајуће константе. $\triangle$