1

- ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ

ПРИМЕР 1. $f(x) = x^\alpha$, на пример $x \in (0,+\infty)$, $\alpha \in R$

$t>0$, $x>0$ $\quad \dfrac{f(xt)}{f(t)} = \dfrac{(xt)^\alpha}{t^\alpha} = x^\alpha$ за свако $x>0$

ПРИМЕР 2. $f(x) = x^\alpha \ln x$, $x \in (0,+\infty)$, $\alpha \in R$

$$\frac{f(xt)}{f(t)} = \frac{(xt)^\alpha(\ln x + \ln t)}{t^\alpha \cdot \ln t} \xrightarrow[t\to\infty]{} x^\alpha, \quad \text{за свако } x>0$$

- ДЕФИНИЦИЈА. (КАРАМАТА 1933)

ПОЗИТИВНА МЕРЉИВА ФУНКЦИЈА $F: [x_0,+\infty) \to R_+$ ЈЕ ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВА У БЕСКОНАЧНОСТИ СА ИНДЕКСОМ $\alpha \in R$ АКО ВАЖИ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\alpha \quad \text{за свако } x>0. \qquad (1)$$

$\alpha = 0$ ... СПОРА ПРОМЕНЉИВОСТ У БЕСКОНАЧНОСТИ

ПРАВИЛНА ПРОМЕНЉИВОСТ ЈЕ ЛОКАЛНО СВОЈСТВО

ПРАВИЛНА ПРОМЕНЉИВОСТ У ТАЧКИ a: $\quad F(a-\frac{1}{x}), \dots$

БРЗА ПРОМЕНЉИВОСТ У БЕСКОНАЧНОСТИ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\rho \quad \text{где је } \rho = -\infty \text{ или } \rho = +\infty$$

- КОМЕНТАРИ О КАРАМАТИНОЈ ДЕФИНИЦИЈИ И ЈЕДНАКОСТИ (1)

Да ли се као гранична вредност у (1) може појавити нека друга функција уместо x^α?

Да ли је конвергенција у (1) равномерна на интервалу $[a,b]$ где је $0<a\le b<+\infty$ и F дефинисана на $(0,+\infty)$?

ОДГОВОР ЈЕ ПОТВРДАН
У СЛУЧАЈУ $\alpha>0$ Р. КОНВ. НА $(0,b]$
У СЛУЧАЈУ $\alpha<0$ Р. КОНВ НА $(a,+\infty)$

ПОСЛЕДИЦА ДЕФИНИЦИЈЕ:
НЕКА ЈЕ $F_1 \in ПП_{\alpha_1}$, $F_2 \in ПП_{\alpha_2}$. ТАДА ВАЖИ

$$F_1 \cdot F_2 \in ПП_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad \frac{F_1}{F_2} \in ПП_{\alpha_1-\alpha_2}$$

- НЕКА ЈЕ $\lim_{x\to\infty} F(x) = c \in R_+$. Тада важи $F \in ПП_0$.

АКО ЈЕ $L: R_+ \to R$ СПОРО ПРОМЕНЉИВА У БЕСКОНАЧНОСТИ ОНДА НЕ МОРА ДА ПОСТОЈИ $\lim_{t\to\infty} L(t)$.

ДВЕ ОСНОВНЕ КАРАМАТИНЕ ТЕОРЕМЕ

- ТЕОРЕМА О КАНОНСКОЈ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈИ

СПОРО ПРОМЕНЉИВА ФУНКЦИЈА L ИМА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈУ

$$L(x) = C_0(x)\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\} \quad \text{ЗА } x \geq x_0 \text{ И НЕКО } x_0 > 0 \qquad (2)$$

ПРИ ЧЕМУ ЈЕ $C_0(\;)$ ПОЗИТИВНА ФУНКЦИЈА И ВАЖИ

$$\lim_{x\to\infty} C_0(x) = C_0 > 0, \qquad \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = 0 \qquad (3)$$

ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВА ФУНКЦИЈА F СА ИНДЕКСОМ $\alpha \in R$ ИМА СЛЕДЕЋУ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈУ

$$F(x) = x^{\alpha} C_0(x)\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\} \quad \text{за } x \geq x_0 \text{ и неко } x_0 > 0 \qquad (4)$$

ГДЕ ЗА ФУНКЦИЈЕ $C_0(x)$ И $\varepsilon(t)$ ВАЖЕ ЈЕДНАКОСТИ (3).

- ПРИМЕР 1. $\ln x = \exp\left\{\int_e^x \frac{dt}{t\ln t}\right\}, \quad x \geq e$

2. $(\ln x)^{\beta} = \exp\left\{\int_e^x \frac{\beta\, dt}{t\ln t}\right\}, \quad x \geq e \quad (\beta \in R)$

$C_0(x) = 1, \ \varepsilon(t) = \frac{\beta}{\ln t}$

3. $\ln\ln x = \exp\left\{\int_{e^e}^{x}\frac{dt}{t\ln t\ln\ln t}\right\}, \quad x \geq e^e$.

$$C_0(x) = 1, \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{\ln t\cdot\ln\ln t}$$

- ПОСЛЕДИЦА. НЕКА ЈЕ L СПОРО ПРОМЕНЉИВА ФУНКЦИЈА У БЕСКОНАЧНОСТИ. ТАДА ЗА СВАКО $\delta > 0$ ВАЖЕ ЈЕДНАКОСТИ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(x)}{x^{\delta}} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\delta}L(x) = \infty.$$

- ПРИМЕР 4. За $x \geq \frac{\pi}{4}$ ВАЖИ

$$\operatorname{arctg} x = e^{\ln\operatorname{arctg} x} = \exp\left\{\int_{\pi/4}^{x}\frac{d(\operatorname{arctg} t)}{\operatorname{arctg} t}\right\} = \exp\left\{\int_{\pi/4}^{x}\frac{dt}{(1+t^2)\operatorname{arctg} t}\right\}$$

$$C_0(x) = 1, \quad \varepsilon(t) = \frac{t}{(1+t^2)\operatorname{arctg} t}$$

ИНТЕГРАЛНА СВОЈСТВА И КАРАМАТИНА ТЕОРЕМА

НЕКА ЈЕ $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ФУНКЦИЈА КОЈА ЈЕ ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВА У БЕСКОНАЧНОСТИ. КАКО СЕ РАЧУНАЈУ (АПРОКСИМИРАЈУ ПРИ $x \to \infty$) ИНТЕГРАЛИ

$$\int_0^x f(t)dt, \quad \int_x^\infty f(t)dt \quad ?$$

ТЕОРЕМА (КАРАМАТА)

НЕКА ЈЕ $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ФУНКЦИЈА КОЈА ЈЕ ИНТЕГРАБИЛНА У ЛЕБЕГОВОМ СМИСЛУ НА КОНАЧНИМ ИНТЕРВАЛИМА

(а) АКО ЈЕ $f(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$, ГДЕ ЈЕ $\alpha < 1$ И L СПОРО ПРОМЕНЉИВА У БЕСКОНАЧНОСТИ, ОНДА ВАЖИ

$$\int_0^x f(t)dt \sim \frac{x f(x)}{1-\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} \frac{L(x)}{x^{\alpha-1}}, \quad x \to \infty$$

(б) АКО ЈЕ $f(x) = L(x)$, ГДЕ ЈЕ $L \in \Pi_0$, ОНДА ВАЖИ

$$x f(x) = o\left(\int_0^x f(t)dt\right), \quad x \to \infty.$$

(в) АКО ЈЕ $f(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$, ГДЕ ЈЕ $\alpha > 1$ И $L \in \Pi_0$, ОНДА ВАЖИ

$$\int_x^\infty f(t)dt \sim \frac{x f(x)}{\alpha - 1} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{L(x)}{x^{\alpha-1}}, \quad x \to \infty.$$

- ПОНАШАЊЕ У БЕСКОНАЧНОСТИ

АКО $F \in ПП_\alpha$, ГДЕ ЈЕ $\alpha \in R$, ОНДА ВАЖИ

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln F(x)}{\ln x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } \alpha < 0 \\ \infty & \text{ако је } \alpha > 0 \end{cases}$$

АКО $F \in ПП_0$, ОНДА НЕ МОРА ДА ПОСТОЈИ $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$.

- КОМПОЗИЦИЈА ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВИХ ФУНКЦИЈА

АКО $F_1 \in ПП_{\alpha_1}$ И $F_2 \in ПП_{\alpha_2}$, $F_2(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, ОНДА ВАЖИ

$F_1 \circ F_2 \in ПП_{\alpha_1 \alpha_2}$.

- ЗБИР ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВИХ ФУНКЦИЈА

АКО $F_1 \in ПП_{\alpha_1}$ И $F_2 \in ПП_{\alpha_2}$ ОНДА ВАЖИ $F_1 + F_2 \in ПП_{max\{\alpha_1, \alpha_2\}}$

УОПШТЕНИ ИНВЕРЗ МОНОТОНЕ ФУНКЦИЈЕ

Дефиниција. Нека је $F: R \to R$ растућа фја и $\overline{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.
Уопштени инверз фје F је фја $F^{-1}: R \to \overline{R}$, дата са

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$$

при чему је $\inf \emptyset = +\infty$.

СВОЈСТВА УОПШТЕНОГ ИНВЕРЗА

1. Функција F^{-1} је непрекидна с леве стране
2. Ако је F растућа ф-ја и непрекидна с десне стране, онда важи

$$F(F^{-1}(y)) \geq y,$$
$$F^{-1}(F(x)) \leq x,$$
$$F^{-1}(y) \leq x \iff y \leq F(x),$$
$$x < F^{-1}(y) \iff F(x) < y.$$

3. Нека је $F_0, F_1, F_2, \ldots$ низ функција расподеле вероватноћа. Ако важи $F_n \Rightarrow F_0$, онда важи и $F_n^{-1} \Rightarrow F_0^{-1}$.

$F_n \Rightarrow F_0$ је ознака за: $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$ за свако $x \in C(F_0)$.

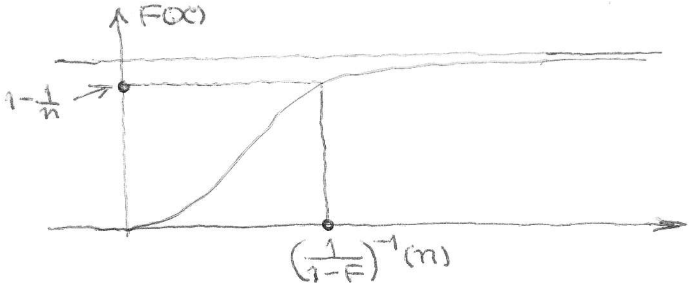
4. Нека је $F: R_+ \to R_+$ растућа функција, $F(\infty) = \infty$ и $F \in ПП_\alpha$ где је $0 \leq \alpha \leq +\infty$. Тада важи $F^{-1} \in ПП_{1/\alpha}$.

5. Нека су F_1 и F_2 растуће функције и $F_1, F_2 \in ПП_\alpha$, где је $0 < \alpha < \infty$, и нека је $0 \leq c \leq \infty$. Тада важи

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = c \iff \lim_{x\to\infty} \frac{F_1^{-1}(x)}{F_2^{-1}(x)} = c^{-1/\alpha}$$

Пример. Нека је F функција расподеле таква да је $x_0 = \sup\{x : F(x) < 1\} = \infty$.

$$\left(\frac{1}{1-F}\right)^{-1}(n) = \inf\left\{x : \frac{1}{1-F(x)} \geq n\right\} = \inf\left\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\right\}$$



НОРМИРАЈУЋЕ КОНСТАНТЕ У ГРАНИЧНИМ ТЕОРЕМАМА

ХИНЧИНОВА ТЕОРЕМА

НЕКА ЈЕ (F_n) НИЗ ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ ЗА КОЈИ ПОСТОЈИ НЕДЕГЕНЕРИСАНА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ G И НИЗОВИ КОНСТАНТИ $a_n>0$ И $b_n\in R$, $n=1,2,\dots$, ТАКО ДА ВАЖИ

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_nx+b_n)=G(x) \quad \text{за свако } x\in C(G). \tag{1}$$

НЕКА ЈЕ G_* НЕДЕГЕНЕРИСАНА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ И $\alpha_n>0, \beta_n\in R, n=1,2,\dots$ НИЗОВИ КОНСТАНТИ.

(а) АКО ВАЖИ

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_nx+\beta_n)=G_*(x) \quad \text{за свако } x\in C(G_*), \tag{2}$$

ОНДА ПОСТОЈЕ a и b тако да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{a_n}=a>0, \quad \lim\frac{\beta_n-b_n}{a_n}=b\in R \tag{3}$$

$$G_*(x)=G(ax+b) \quad \text{за свако } x\in R. \tag{4}$$

(б) АКО ВАЖЕ ЈЕДНАКОСТИ (3), ОНДА ВАЖЕ И ЈЕДНАКОСТИ (2) И (4).