(Сума $\sum_{i=1}^{n} i$ добија се у специјалном случају $x = 1$, $c = 1$.)

**2.** Доказати да једнакост

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}\left(1-(n+1)x^n + nx^{n+1}\right)$$

важи за $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. (Свести суму на парцијалну геометријску суму.)

**3.** Коришћењем претходног задатка израчунати суме

$$\sum_{i=1}^{n} i(-1)^i \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

**4.** Доказати једнакост

$$\sum_{i=1}^{n}(3\cdot 2^n + 5) = 3\cdot 2^{n+1} + 5n + 2.$$

**5.** Израчунати суму

$$\sum_{i=1}^{n} i^4.$$

(Потражити решење у облику полинома петог степена и пратити Пример 1.1.5.)

## 1.2 Пребројавања

Један од важних делова комбинаторике јесте пребројавање (или енумерација) које се бави одређивањем кардиналности неког скупа. Изложићемо три основна принципа пребројавања, као и једно уопштење Дирихлеовог[6] принципа (једноставне и од раније познате технике). Једна сложенија техника пребројавања изложена је у Пододељку 1.3.3, а са пребројавањима скупова сретаћемо се и у остатку књиге.

### 1.2.1 Основни принципи пребројавања

Дакле, *пребројати скуп* значи одредити његову кардиналност. Уколико је тај скуп непразан и коначан, претходно се своди на одређивање природног броја $n$ који је једнак броју елемената тог скупа.

[6]Јохан Петер Густав Лежен Дирихле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859) – немачки математичар.

Три основна принципа пребројавања су: принцип једнакости, принцип збира и принцип производа. Следи детаљнији приказ сваког од њих.

*Принцип једнакости.* Са овим принципом смо се у одређеној форми већ сусрели у уводном делу књиге. Према принципу, уколико за скупове $A$ и $B$ постоји бијективно пресликавање $f\colon A \longrightarrow B$, тада важи једнакост $|A| = |B|$.

**Пример 1.2.1.** Скуп парних бројева $S$ је пребројив, будући да постоји бијективно пресликавање

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow S,\ f(n) = 2n.$$

Скуп $A$ дефинисан са

$$A = \{a \mid a \in \mathbb{N}_{30} \ \wedge\ a \text{ је дељиво са } 3\}$$

има 10 елемената, јер постоји бијективно пресликавање

$$f\colon A \longrightarrow \mathbb{N}_{10},\ f(a) = \frac{a}{3}.$$

*Принцип збира.* Уколико су коначни скупови $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дисјунктни, тада важи једнакост $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$. Доказ овог принципа је заиста једноставан.

**Пример 1.2.2.** Размотримо следећи псеудокод алгоритма који сортира чланове низа $n$ бројева у неопадајући поредак:

**BEGIN**

**INPUT** $A = (A(1), A(2), \ldots, A(n))$ ;

**FOR** $i = 1$ **TO** $n - 1$

  **FOR** $j = i + 1$ **TO** $n$

    **IF** $A(i) > A(j)$

      замени места члановима $A(i)$ и $A(j)$ ;

**RETURN** $A$

**END**

Дакле, у питању је једонставна процедура са којом се читалац вероватно већ сретао. Израчунајмо сада колико пута је извршено поређење чланова низа, то јест колико пута је извршен сегмент псеудокода: **IF** $A(i) > A(j)$.

За $i = 1$ извршена су поређења првог члана са свим осталим члановима којих је има $n-1$. За $i = 2$ извршена су поређења другог члана са свим члановима осим са првим, и тако редом. Дакле, закључујемо да је укупан број поређења једнак $(n-1)+(n-2)+\ldots+1$. (Од раније знамо да је ова сума једнака $\frac{n(n-1)}{2}$, но то није важно за оно што следи.)

Интересантно је да смо до споменутог броја поређења дошли тако што смо имплицитно применили принцип збира. Наиме, нека је $S$ скуп свих поређења чланова низа. Тај скуп поделићемо на $n-1$ дисјунктних подскупова $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, таквих да подскуп $S_i$ садржи сва поређења члана $A(i)$ са онима који следе након њега у почетном низу. Сада, користећи чињеницу да скуп $S_i$ садржи тачно $n-i$ елемената, на једноставан начин долазимо до споменутог броја елемената скупа $S$.

*Принцип производа.* Нека су $A$ и $B$ произвољни коначни скупови и $A \times B$ њихов Декартов производ. Тада важи једнакост $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Важи и нешто општији закључак. Нека је $S \subseteq A \times B$. Означимо са $v_a$ све елементе скупа $S$ код којих је прва координата фиксирана (и једнака $a$), то јест

$$v_a = \{(a,b) \in S \mid b \in B\}.$$

Слично, означимо са $k_b$ све елементе скупа $S$ код којих је друга координата фиксирана (и једнака $b$), то јест

$$k_b = \{(a,b) \in S \mid a \in A\}.$$

Тада важи:

$$|S| = \sum_{a \in A} |v_a| = \sum_{b \in B} |k_b|.$$

Очигледно је да се једнакост из принципа производа добија у специјалном случају у којем важи $S = A \times B$.

Није тешко уочити да се принцип производа може уопштити и на произвољан коначан број скупова. То ћемо илустровати у наредна два примера.

**Пример 1.2.3.** Колико има бинарних речи дужине $n$?

Будући да се свака таква реч састоји од $n$ бинарних цифара, размотримо Декартов производ

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n}.$$

Очигледно, број елемената овог Декартовог производа једнак је

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} = 2^n,$$

а то је управо оно што нама треба. Наиме, на свакој од $n$ позиција налази се један елемент скупа $\{0,1\}$, што значи да за сваку позицију имамо по два кандидата, а то даје укупан број у виду датог степена броја 2.

**Пример 1.2.4.** Колико има трочланих комбинација скупа $\mathbb{N}_{30}$ (уз допуштено понављање истог броја), таквих да је барем један број у свакој комбинацији једноцифрен?

Слично као у претходном примеру, закључујемо да је број свих трочланих комбинација једнак броју елемената Декартовог производа $|\mathbb{N}_{30}| \times |\mathbb{N}_{30}| \times |\mathbb{N}_{30}|$, то јест $30^3$. Такође, број свих оних комбинација које се састоје од двоцифрених бројева једнак је $21^3$. Стога је број тражених комбинација једнак

$$30^3 - 21^3 = 17\,739.$$

### 1.2.2 Дирихлеов принцип

Подсетимо се *Дирихлеовог принципа*: уколико је $k$ објеката распоређено у $n$ кутија, при чему важи $k > n$, тада постоји кутија у којој се налазе барем два објекта.

**Пример 1.2.5.** Докажимо да у скупу од $n$ $(n \geq 2)$ особа постоје барем две које познају једнак број особа из тог скупа. (Сматраћемо да познанство није рефлексивна, а јесте симетрична релација.)

Број особа које једна особа може познавати креће се од 0 до $n-1$. Приметимо да се две екстремне вредности међусобно искључују, јер ако нека особа не познаје ниједну особу из скупа, онда не може постојати друга особа која познаје све, и обратно. Другим речима, постоји $n-1$ могућих познанстава за сваку особу, па на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да постоје барем две са једнаким бројем познанстава.

Размотримо сада следеће уопштење. *Уопштени Дирихлеов принцип:* уколико је $k$ објеката распоређено у $n$ кутија, при чему важи $k > cn$, за $c \in \mathbb{N}$, тада постоји кутија таква да број објеката распоређених у њу није мањи од $c+1$.

**Пример 1.2.6.** Колико најмање пута треба бацити нумерисану коцкицу тако да са сигурношћу можемо рећи да је барем један број добијен 3 пута?

Приметимо да се може догодити да у првих 6 бацања добијемо 6 различитих бројева. У складу са тим, у најнеповољнијем случају може се догодити да је након 12 бацања сваки број добијен по 2 пута. У тој ситуацији, следеће бацање ће дати неки број поновљен 3 пута. Дакле, одговор је 13.

Ово је било једнставно решење на које би ишао скоро свако ко би се сусрео са оваквим задатком, али где је ту уопштени Дирихлеов принцип? Детаљнија анализа показује да смо га (имплицитно) применили.

Замислимо да смо уместо бацања једне коцкице имали неограничен број коцкица и преформулисани задатак: колики је најмањи број коцкица које треба (одједном) бацити тако да се неки број добије најмање 3 пута? У складу са нотацијом из уопштеног Дирихлеовог принципа, овде имамо $n = 6$ (могући бројеви), $c = 2$ (тражи се да се барем један добије 2+1=3 пута), док је $k$ тражени број коцкица. Будући да мора важити $k > cn$, добијамо $k = 13$.

Следећи пример може се пронаћи у разној литератури и представља увод у једну широку математичку теорију о којој ћемо рећи нешто више у наставку текста.

**Пример 1.2.7.** Докажимо да у скупу од 6 особа постоје 3 које се или све међусобно познају или све међусобно не познају. Као у Примеру 1.2.5, познанство је симетрична релација.

Нека је $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ скуп од 6 особа. Ако издвојимо особу $a$, онда остатак скупа $A$ можемо поделити на оне особе које познају особу $a$ и на оне које је не познају (и тиме добијамо два подскупа скупа $A$). Имамо 2 подскупа и 5 особа, па према уопштеном Дирихлеовом принципу закључујемо да један подскуп садржи најмање 3 особе. Нека без губљења на општости особе $b, c$ и $d$ припадају том подскупу.

Претпоставимо да особе $b, c$ и $d$ познају особу $a$. Уколико међу њима постоје две особе које се познају, тада те две особе и $a$ чине тражени скуп (три особе које се познају). Уколико се пак особе $b, c$ и $d$ не познају, тада баш оне чине тражени скуп (три особе које се не познају).

Уколико особе $b, c$ и $d$ не познају особу $a$, доказ је аналоган претходном.

Овај пример део је много општије теорије познате као *Рамзијева*[7] *теорија*. У тој теорији, *Рамзијев број* $R(k, n)$, за $k, n \in \mathbb{N}$, означава најмањи скуп особа такав да у њему постоји или $k$ особа које се међусобно познају или $n$ особа које се међусобно не познају. У складу са нашим примером, важи $R(3, 3) \leq 6$, а будући да није тешко доказати да скуп од 5 особа, у општем случају, не задовољава тражени критеријум, заправо важи $R(3, 3) = 6$. Више детаља о Рамзијевој теорији може се пронаћи у [24].

## Задаци

**1.** Колико има природних бројева мањих од милион који садрже нискy цифара 212 или су дељиви са 11?

**2.** Колико делилаца има број $7^6 - 6^7$?

**3.** Колико се највише ловаца може распоредити на шаховску таблу тако да се никоја два не нападају?

**4.** Колико има природних бројева мањих од $2^{16}$ чији бинарни запис садржи највише 5 јединица?

**5.** Лозинка за приступ неком систему има између 8 и 12 карактера који могу бити велика и мала слова енглеске абецеде и бројеви. Колико лозинки постоји уколико је познато да оне не могу почети бројем? Претпоставимо да желимо да погодимо нечију лозинку (насумичним погађањем) и да нам је потребно $t$ секунди за проверу једне комбинације карактера. Колико времена је потребно за проверу свих комбинација? Проценити да ли би рачунар могао обавити исту процедуру у неком реалном времену.

**6.** Да ли је могуће покрити шаховску таблу доминама (једна домина покрива два поља) тако да само два дијагонално супротна поља остану непокривена?

[7] Френк Пламптон Рамзи (Frank Plumpton Ramsey, 1903–1930) – енглески математичар и филозоф.

**7.** Доказати да у скупу од 5 тачака које се налазе унутар квадрата странице 2 постоје најмање две које се налазе на растојању не већем од $\sqrt{2}$.

**8.** Доказати да у скупу од 100 насумично изабраних природних бројева постоје најмање два чија је разлика дељива са $k = 7$.

**9.** Одредити најмању вредност $k$ за коју се не може гарантовати постојање два броја за које важи тврђење претходног задатка.

**10.** Ако је свака тачка равни обојена плавом или црвеном бојом, доказати да у њој постоје две тачке на растојању 1 које су обојене истом бојом.

**11.** Ако је свака тачка равни обојена плавом, црвеном или жутом бојом, доказати да у њој постоји четвороугао чија су темена обојена истом бојом.

**12.** Доказати да је Рамзијев број $R(3,4)$ једнак 9.

## 1.3 Биномни коефицијенти

Биномни коефицијенти (или коефицијенти у развоју бинома) представљају један од најважнијих комбинаторних појмова. У ономе што следи упознаћемо се са њиховим основним својствима, неким идентитетима и једном напредном техником пребројавања познатом као формула укључења-искључења.

### 1.3.1 Основна својства

*Биномни коефицијенти*, у ознаци $\binom{n}{k}$ (чита се „$n$ над $k$”), дефинише се за свако $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{R}$ као

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Додатно се дефинише $\binom{n}{0} = 1$. У специјалном случају $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, важи једнакост

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1.4}$$

која следи директно из дефиниције.

**Пример 1.3.1.** Вредност биномног коефицијента за $n = -5,3$ и $k = 3$ је

$$\begin{aligned}\binom{-5,3}{3} &= \frac{(-5,3)\cdot(-5,3-1)\cdot(-5,3-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{(-5,3)\cdot(-6,3)\cdot(-7,3)}{6}\\ &= -\frac{243,747}{6} = -40,6245.\end{aligned}$$

Следе нека основна својства биномних коефицијената, то јест основни идентитети које биномни коефицијенти задовољавају.

**Теорема 1.3.2 (услов симетричности).** *За природне бројеве $k$ и $n$, који задовољавају $k \leq n$, важи једнакост*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

*Доказ.* Користећи формулу (1.4), добијамо

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.3.3 (негација горњег индекса).** *За $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{R}$ важи једнакост*

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}.$$

*Доказ.* Директним рачуном добијамо:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}\\ &= \frac{(-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k}.\end{aligned}$$

■

Наредни идентитет, који се у литератури може пронаћи и под другачијим називима, често ћемо користити у ономе што следи.

**Теорема 1.3.4 (адициона формула).** *За $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{R}$ важи једнакост*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

*Доказ.* Слично као у претходној теореми, добијамо

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k+k)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

■

Сетимо се *Паскаловог*[8] *троугла*, то јест схематског распореда природних бројева у виду „бесконачног” троугла илустрованог на Слици 1.1. Дуж „бочних ивица” налазе се јединице, а сваки од осталих бројева једнак је суми два броја који се налазе горе-лево и горе-десно у односу на њега.

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ \ \dots & & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

Слика 1.1: Паскалов троугао.

Приметимо да су елементи $n$-те врсте облика $\binom{n}{k}$, за $1 \le k \le n$. За почетне врсте ово није тешко проверити директним рачуном. Доказ

[8] Блез Паскал (Blaise Pascal, 1623–1662) – француски математичар, физичар и филозоф.

да је то заиста тако у случају било које врсте Паскаловог троугла следи директно из адиционе формуле. Заиста, она тврди управо оно што смо и користили при конструкцији троугла: $k$-ти елемент у $n$-тој врсти ($1 < k < n$) једнак је суми $(k-1)$-ог и $k$-тог елемента из $(n-1)$-ве врсте. Другим речима, Паскалов троугао није ништа друго до један схематски запис једнакости које следе из адиционе формуле.

Формула по којој су биномни коефицијенти добили назив позната је као *биномна формула* (у некој литератури, биномна теорема). Овде ћемо дати један индуктивни доказ.

**Теорема 1.3.5 (биномна формула).** *За $n \in \mathbb{N}^*$ и $x, y \in \mathbb{R}$ важи једнакост*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

*Доказ.* Индукцијом по $n$. За $n = 0$ добијамо идентитет $1 = 1$ (база индукције). Претпоставимо да формула важи за $n-1$ (индуктивна хипотеза). Једноставним алгебарским трансформацијама, уз коришћење индуктивне хипотезе у другој и адиционе формуле у петој једнакости, добијамо тражени идентитет:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)x^k y^{n-k} + y^n \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y^n \\
&= \binom{n}{n}x^n y^{n-n} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \binom{n}{0}x^0 y^{n-0} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.
\end{aligned}$$

■

Ова теорема нам каже да су коефицијенти дефинисани једнакошћу (1.4) управо коефицијенти који се појављују у развоју бинома $(x+y)^n$. На основу претходне дискусије, сви они могу се прочитати из Паскаловог троугла. У Пододељку 1.6.2 доказаћемо слично тврђење у којем важи $n \in \mathbb{Z}$.

**Пример 1.3.6.** Ево неких специјалних случајева са којима ћемо се сретати у наставку.

- Заменом $x = 1$ и $y = 1$ у биномној формули, добијамо формулу за суму биномних коефицијената:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

- Заменом једног од сабирака јединицом, на пример $y = 1$, добијамо једнакост:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

- Заменом $x = 1$ и $y = -1$ и обратно, добијамо једнакости:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Наведимо још неколико примера.

**Пример 1.3.7.** Написати бином $(x+y)^5$ у развијеном облику.

Потребно је израчунати све коефицијенте $\binom{5}{k}$, за $0 \leq k \leq 5$. (На пример, може се искористити Паскалов троугао.) Тражени коефицијенти су $1, 5, 10, 10, 5$ и $1$, па је развој дат са

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

**Пример 1.3.8.** Израчунати коефицијент који се налази уз $x^{50}y^{25}$ у развоју бинома $(x+y)^{75}$.

Важи $n = 75$, док из $x^{50}y^{25}$ закључујемо да важи $k = 50$, па је тражени коефицијент једнак

$$\binom{75}{50} = 52\,588\,547\,141\,148\,893\,628.$$

Наредни пример је врло сличан.

**Пример 1.3.9.** Израчунати коефицијент који се налази уз $x^6y^{11}$ у развоју бинома $(2x-3y)^{17}$.

Применом биномне формуле, добијамо

$$(2x-3y)^{17} = \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} (2x)^k (-3y)^{17-k},$$

па закључујемо да се уз $x^6y^{11}$ налази

$$\binom{17}{6} \cdot 2^6 \cdot (-3)^{11} = -\frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{6!} \cdot 64 \cdot 3^{11} = -792\,064 \cdot 3^{11}.$$

Важи и једно уопштење биномне формуле чији доказ ћемо изоставити. У формулацији теореме количник $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$ означићемо са

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}.$$

**Теорема 1.3.10 (полиномна формула).** *За $n \in \mathbb{N}^*$ и $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ важи једнакост*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n \\ k_1, k_2, \ldots, k_r \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}.$$

**Пример 1.3.11.** Уколико бисмо трином $(x_1+x_2+x_3)^3$ желели да напишемо у развијеном облику, то бисмо урадили директном применом полиномне формуле. Овде ћемо написати првих неколико чланова развоја:

$$(x_1+x_2+x_3)^3 = \binom{3}{3,0,0} x_1^3 + \binom{3}{0,3,0} x_2^3 + \binom{3}{0,0,3} x_3^3 + \binom{3}{2,1,0} x_1^2 x_2 + \ldots$$

(Са десне стране једнакости налази се 10 сабирака.)

**Пример 1.3.12.** Израчунати коефицијент који се налази уз $xy^2z^4$ у развоју тринома $(2x+y-3z)^7$.

Важи $n=7$, а из $xy^2z^4$ добијамо $k_1=1, k_2=2$ и $k_3=4$. Одговарајући члан у развоју једнак је

$$\binom{7}{1,2,4} 2xy^2(-3z)^4 = 162 \cdot \binom{7}{1,2,4} xy^2z^4,$$

па је тражени коефицијент једнак

$$162 \cdot \binom{7}{1,2,4} = 162 \cdot \frac{7!}{1!2!4!} = 162 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 17\,010.$$

## 1.3.2 Неки биномни идентитети

У литератури се може пронаћи изузетно велики број идентитета који укључују биномне коефицијенте. Неке књиге, попут класичне [28], посвећене су само њима. Последњих деценија развијају се аутоматизовани методи за њихово доказивање, а постоје и интернет странице посвећене њима.

У класичној комбинаторици издвајају се два метода за доказивање биномних идентитета. Један је алгебарски и у оквиру њега доказ се изводи алгебарским рачуном (који се често своди на примену математичке индукције или свођење идентитета на неки који је од раније познат). Овај метод применили смо у доказима свих теорема из претходног пододељка и применићемо га у доказима теорема које следе. Нешто сложенија варијанта истог метода изложена је у Пододељку 1.6.4. Други метод је комбинаторни и са њим ћемо се сусрести у оквиру Пододељка 1.4.4.

Неки од идентитета које ћемо овде навести важе и у општијој форми од наведене, то јест без ограничења на ненегативне целе бројеве у случају горњег индекса.

**Теорема 1.3.13 (извлачење испред заграде).** *За $k, n \in \mathbb{N}$ важе идентитети (други под претпоставком $k \neq n$)*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad \text{и} \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}.$$

*Доказ.* За $k > n$ оба идентитета следе директно. У супротном, доказаћемо први, док се други доказује на сличан начин. Директним рачуном добијамо следећи низ једнакости:

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

■

**Теорема 1.3.14 (поједностављивање производа).** *За $k, n, r \in \mathbb{N}^*$ важи једнакост*

$$\binom{n}{k+r}\binom{k+r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r}.$$

*Доказ.* Довољно је размотрити случај $k + r \leq n$. Применом идентитета (1.4), потом груписањем одговарајућих чланова и поновном применом истог идентитета, добијамо:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{r} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{(k+r)!} \\ &= \frac{n!}{(k+r)!(n-k-r)!} \cdot \frac{(k+r)!}{k!r!} \\ &= \binom{n}{k+r}\binom{k+r}{k}.\end{aligned}$$

■

Није тешко проверити да последњи идентитет важи и када је $n$ произвољан цео број.

**Теорема 1.3.15 (сумационе формуле).** *За* $r, n \in \mathbb{N}^*$ *важе једнакости*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{n+r+1}{n} \quad \text{и}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

*Доказ.* Применом математичке индукције доказаћемо први идентитет, а на сличан начин доказује се и други.

За $n = 0$ добијамо идентитет $1 = 1$. Претпоставимо да формула важи за $n - 1$. Раздвајањем суме са леве стране једнакости на суму првих $n$ сабирака и последњи сабирак, потом применом индуктивне хипотезе на добијену суму и коначно применом адиционе формуле, добијамо тражени идентитет. Конкретно, важи низ једнакости:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} + \binom{r+n}{n} \\ &= \binom{r+n}{n-1} + \binom{r+n}{n} \\ &= \binom{n+r+1}{n}.\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.3.16 (сума квадрата).** *За $n \in \mathbb{N}^*$ важи једнакост*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

*Доказ.* Овде ћемо дати један елегантан доказ заснован на биномној формули. За сваки реалан број $x$ важи једнакост

$$(x+1)^n(1+x)^n = (x+1)^{2n}.$$

Сада, на основу специјалног случаја биномне формуле (за $y = 1$) обрађеног у Примеру 1.3.6 и њему симетричног случаја (за $x = 1$), закључујемо да важи

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Јасно, коефицијенти који се налазе уз $x^n$ у изразима са леве и десне стране ове једнакости морају бити једнаки. Ти коефицијенти редом су једнаки $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ и $\binom{2n}{n}$, одакле следи тврђење. ■

Овај доказ истовремено представља увод у нешто што следи касније у Пододељку 2.3.4. Још један елегантан доказ може се извести коришћењем идентитета који ће бити доказан у Теореми 1.4.13 (видети текст након те теореме). Приметимо да би индуктивни доказ ишао нешто теже, будући да се горњи индекс $n$ по којем треба да иде индукција појављује и у изразу који се сумира.

### 1.3.3 Формула укључења-искључења

Формула укључења–искључења представља уопштење раније споменутог принципа збира. Према том принципу, подсетимо се, важи $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$, када год су разматрани скупови дисјунктни. Уколико два или три скупа имају непразан пресек, тада важи

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

односно

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Ово нас доводи до претпоставке да би у општем случају могло важити нешто овог облика:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = &|A_1| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \ldots\end{aligned}$$

Формални доказ дат је у наредној теореми.

**Теорема 1.3.17 (формула укључења-искључења).** *За коначне скупове $A_1, A_2, \ldots, A_n$ важи једнакост*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|. \tag{1.5}$$

*Доказ.* Уколико неки елемент $x$ припада унији $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, тада тај елемент припада и неким од скупова $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Претпоставимо да $k$ скупова садржи елемент $x$ и нека су то, без губљења на општости, скупови $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тада важи $x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$.

Будући да припада споменутој унији, елемент $x$ доприноси да се вредност са леве стране једнакости у формули (1.5) увећа за 1. Треба доказати да $x$ на исти начин доприноси и вредности са десне стране, то јест да се и она увећа за 1.

Размотримо сабирке са десне стране једнакости. Најпре, приликом сабирања $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$, $x$ доприноси да се десна страна увећа за $k$. Приликом одузимања двочланих пресека, $x$ доприноси да се десна страна умањи за $\binom{k}{2}$ (претпостављамо да је ово познато, а уколико је потребно, видети Теорему 1.4.10 у наставку), приликом сабирања трочланих пресека десна страна се увећава за $\binom{k}{3}$, и тако редом. Дакле, допринос елемента $x$ вредности са десне стране једнакости једнак је:

$$\begin{aligned}
&k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} \\
&= \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} - \binom{k}{0} + \binom{k}{0} \\
&= \binom{k}{0} - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = 1,
\end{aligned}$$

при чему је последња једнакост последица биномне формуле (видети Пример 1.3.6). Овим је доказ завршен. ∎

## Задаци

**1.** Доказати да за $n \in \mathbb{N}$ низ бројева

$$\binom{n}{k}$$

расте за $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и потом опада. (Ознаку $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ користимо за највећи цео број који није већи од $\frac{n}{2}$.)

**2.** Израчунати суму свих коефицијената који се појављују у развоју бинома $(-3x + 40)^{99}$.

**3.** Израчунати коефицијент који се налази уз

- $x^{12}$ у развоју тринома $(1-x+x^3)^7$ и
- $x^4y^3$ у развоју тринома $(3x+2y-1)^6$.

**4.** Доказати идентитете (други, за $k \neq n$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{n+1}\binom{n+1}{k} \quad \text{и} \quad \binom{n}{k} = \frac{k+1}{n-k}\binom{n}{k+1}.$$

(Код ових и свих наредних идентитета претпоставити да је горњи индекс природан број.)

**5.** Доказати идентитете

- $\binom{k+n}{2} - \binom{k}{2} - \binom{n}{2} = kn$ и
- $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

**6.** Доказати идентитет

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^n(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{n!}.$$

**7.** Израчунати суме

- $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$,
- $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n+1}{k}$ и
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n+k}{k}$.

**8.** Доказати идентитете

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^k = 2^{2n}$ и
- $\sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{k+n}{2k+r}\binom{2k}{k} = \binom{n-1}{r-1}$.

**9.** Колико има природних бројева не већих од 1001 који су дељиви најмање једним од бројева 7, 11 или 13? (Овај и наредни задаци могу се решити на разне начине, а овде су задати јер је један од начина заснован на формули укључења-искључења.)

**10.** У лифту се налази 10 особа. На колико начина све особе могу изаћи на 5 спратова, ако на сваком спрату мора изаћи барем једна особа?

**11.** Располажемо са 5 боја. На колико начина можемо обојити стране октаедра тако да оне које имају заједничку ивицу бојимо различитим бојама?

**12.** Колико има природних бројева у чијим су записима све цифре међусобно различите?

**13.** Нумерисану коцкицу бацамо докле сума добијених бројева не буде већа или једнака 100. Колико има низова добијених бројева у сваком појединачном резултату (рачуна се и последње бацање)?

## 1.4 Избори елемената

У овом одељку упознаћемо четири типа избора елемената неког коначног скупа, као и специјалне случајеве неких од тих избора. Нешто од онога што следи читаоцу је вероватно познато од раније, а наш акценат ће бити на формалним доказима познатих тврђења и примерима.

### 1.4.1 Четири типа избора елемената

Нека је потребно изабрати фиксирани број елемената неког коначног скупа. У зависност од тога да ли је битан редослед у којем бирамо елементе и да ли је дозвољено понављање приликом избора, разликујемо четири избора елемената. Изборе елемената код којих је битан редослед у којем их бирамо називамо уређеним, па тако у зависности од тога да ли је понављање дозвољено или није, разликујемо *уређене изборе елемената са понављањем* и *уређене изборе елемената без понављања*. Слично, изборе елемената код којих није битан редослед у којем их бирамо називамо неуређеним, па тако у зависности од тога да ли је понављање дозвољено или није, разликујемо *неуређене изборе елемената са понављањем* и *неуређене изборе елемената без понављања*.

***Напомена 1.4.1.*** У литератури се могу пронаћи и другачији називи споменутих избора, па се тако уређени избори елемената могу препознати под називима *варијације* (са или без понављања) или *пермутације*

*$k$-тог реда*, при чему $k$ представља број елемената које бирамо. Слично, неуређени избори елемената називају се и *комбинације* (поново, са или без понављања). Овај термин ћемо и ми користити, нарочито у случају избора без понављања.

Термин „без понављања" углавном се изоставља. Такође, избори елемената са понављањем могу бити разматрани и као избори елемената без понављања (али) мултискупа.

**Пример 1.4.2.** Израчунајмо колико има избора 2 елемента петочланог скупа $A = \{a, b, c, d, e\}$ у сва 4 случаја.

Број уређених избора са понављањем једнак је броју двословних речи које се могу формирати коришћењем слова која припадају скупу $A$. Очигледно је да постоји 5 таквих речи које почињу сваким од слова (у случају слова $a$ то су $aa, ab, ac, ad, ae$), те је укупан број једнак $5^2$.

Да бисмо добили уређене изборе без понављања, довољно је да из претходних избора елиминишемо оне код којих се елементи понављају, а таквих је 5, што значи да оваквих избора има 20.

Слично, да бисмо добили неуређене изборе елемената са понављањем, довољно је да у скупу уређених избора са понављањем идентификујемо оне који се разликују само у редоследу изабраних елемената (на пример, такви су $ab$ и $ba$). Након једноставног пребројавања долазимо до 15 оваквих избора.

Напослетку, неуређене изборе без понављања добијамо када из претходних избора елиминишемо оне код којих се елементи понављају, што нас доводи до 10 оваквих избора.

У наставку ћемо рећи нешто више о сваком од наведених избора елемената.

### 1.4.2 Уређени избори елемената са понављањем

Размотримо уређени избор $k$ елемената скупа од $n$ елемената, уз дозвољено понављање приликом избора, при чему су $k$ и $n$ природни бројеви. Број таквих избора једнак је броју пресликавања $f\colon \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_n$. Наиме, ако скуп од $n$ елемената идентификујемо са скупом $\mathbb{N}_n$, онда је јасно да сваком пресликавању $f$ једнозначно одговара један избор елемената на начин да је $i$-ти изабрани елемент у оквиру тог избора једнак $f(i)$, $i \in \mathbb{N}_k$. У складу са претходним запажањем, није тешко одредити број оваквих избора елемената.

**Теорема 1.4.3.** *Број пресликавања $f\colon \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_n$ једнак је*

$$n^k.$$

*Доказ.* Доказ ћемо извести индукцијом по $k$. За $k = 1$ постоји $n$ пресликавања којима се јединствени елемент скупа $\mathbb{N}_1$ пресликава у неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$, чиме је формирана база индукције.

Претпоставимо да тврђење важи за $k-1$ (индуктивна хипотеза) и пређимо на индуктивни корак. На основу индуктивне хипотезе закључујемо да се $k-1$ елемената скупа $\mathbb{N}_k$ може пресликати у елементе скупа $\mathbb{N}_n$ на $n^{k-1}$ начина, а преостали, $k$-ти елемент, може се на $n$ начина пресликати у неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$. (Једноставно, кодомен има $n$ елемената који су могуће слике.) Дакле, постоји $n \cdot n^{k-1} = n^k$ пресликавања. ∎

Нека је $A$ произвољан подскуп неког скупа $X$. *Карактеристична функција* скупа $A$, $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$, дефинисана је са

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Сада можемо доказати и следећу теорему.

**Теорема 1.4.4.** *Нека је $X$ неки скуп од $n$ елемената. Број елемената партитивног скупа скупа $X$ једнак је $2^n$, то јест важи*

$$|P(X)| = 2^n.$$

*Доказ.* Уочимо да сваком подскупу $A$ скупа $X$ (укључујући празан скуп и сам $X$) одговара јединствена карактеристична функција $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$, али и обратно, свака функција датог облика одговара једном подскупу. Другим речима, број елемената партитивног скупа скупа $X$ једнак је броју карактеристичних функција (подскупова скупа $X$). У складу са Теоремом 1.4.3, оваквих функција има $2^n$. ∎

### 1.4.3 Уређени избори елемената

Нека су и даље $k$ и $n$ природни бројеви. Уколико важи $k > n$, јасно је да не постоји ниједан уређени избор $k$ елемената (без понављања) мањег скупа од $n$ елемената, те стога надаље можемо претпоставити да важи $k \leq n$. Број уређених избора $k$ елемената скупа од $n$ елемената једнак је броју инјективних пресликавања $f : \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_n$. Заиста, сваки избор можемо идентификовати са једним пресликавањем на исти начин као код претходно описаних избора елемената. У овом случају, инјективност пресликавања елиминише могућност понављања приликом избора.

**Теорема 1.4.5.** *За природне бројеве $k$ и $n$ такве да важи $k \leq n$, број инјективних пресликавања $f : \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_n$ једнак је*

$$\prod_{i=0}^{k-1}(n-i).$$

*Доказ.* И у овом доказу применићемо метод математичке индукције по промењљивој $k$. Базу индукције формирамо на начин описан у доказу Теореме 1.4.3.

Претпоставимо да тврђење важи за $k-1$ (индуктивна хипотеза). То значи да се $k-1$ елемената скупа $\mathbb{N}_k$ може ињективно пресликати у елементе скупа $\mathbb{N}_n$ на $n(n-1)\cdots(n-k+2)$ начина, док је број начина на које се преостали, $k$-ти елемент, може пресликати у неки елемент скупа $\mathbb{N}_n$ једнак $n-k+1$. Наиме, пошто се ради о ињективним пресликавањима, преостало је још $n-k+1$ могућих слика за тај елемента. Дакле, $k$ елемената скупа $\mathbb{N}_k$ можемо на

$$\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$

начина ињективно пресликати у елементе скупа $\mathbb{N}_n$. ■

***Напомена 1.4.6.*** Производ из теореме једнак је $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ако важи $k > n$, онда је један фактор у производу (а тиме и сам производ) једнак нули, па тврђење важи и тада уз опаску да у таквој ситуацији претходни количник није дефинисан.

**Пример 1.4.7.** Нека је дато 10 градова од којих треба обићи 4 у произвољном редоследу и сваки по једанпут. На колико начина је то могуће урадити?

На почетку постоји 10 кандидата за први град који обилазимо, потом 9 за други, 8 за трећи и, на крају, 7 за четврти град. Дакле, решење је

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

*Пермутације* (скупа од $n$ елемената) су специјалан случај уређених избора елемената код којих важи $k = n$. У складу са тим, број пермутација скупа од $n$ елемената једнак је

$$n(n-1)\cdots 1 = n!.$$

Следи пример и напомена која се односи на нотацију.

**Пример 1.4.8.** Пермутације скупа $\{1,2,3,4,5\}$ заправо представљају размештања елемената овог скупа. Једна од њих је 12345, нека друга је 24531, а на основу претходне формуле, укупно их има $5! = 120$.

***Напомена 1.4.9.*** Надаље ћемо пермутације наводити на начин описан у претходном примеру, дакле у виду ниски елемената разматраног скупа.

Функција факторијел веома брзо расте, а тиме и број пермутација скупа с порастом његове кардиналности. На пример, важи $15! > 10^{12}$ и $20! > 2 \cdot 10^{18}$ За веће вредности $n$ важи *Стирлингова*[9] (*асимптотска*) *формула*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

при чему је $e$ природна константа.

### 1.4.4 Неуређени избори елемената

Најпре ћемо размотрити ове изборе елемената, па се потом вратити на неуређене изборе елемената са понављањем. Нотација коју ћемо користити усклађена је са оном из Одељка 1.3. Важи следећа теорема.

**Теорема 1.4.10.** *Нека су $k$ и $n$ природни бројеви такви да важи $k \leq n$. Број неуређених избора $k$ елемената скупа од $n$ елемената једнак је*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Доказ.* На основу Теореме 1.4.5, број уређених избора $k$ елемената скупа од $n$ елемената једнак је $\frac{n!}{(n-k)!}$. Будући да се у овом случају ради о неуређеним изборима, од свих уређења скупа од $k$ елемената (што су заправо пермутације истог скупа) треба елиминисати сва изузев једног. То нас практично доводи до закључка да претходни количник треба поделити бројем пермутација (који је једнак $k!$), одакле следи тврђење. ■

Вредност из теореме једнака је биномном коефицијенту $\binom{n}{k}$. Раније смо напоменули да се у овом контексту често користи термин „комбинације $k$ елемената скупа од $n$ елемената”. На основу Теореме 1.3.2, закључујемо да је број таквих комбинација једнак броју комбинација $n-k$ елемената скупа од $n$ елемената.

**Пример 1.4.11.** Састављамо кладионички тикет који садржи 8 парова, а потребно је погодити 5 исхода. Колико има добитних комбинација ако смо погодили 8, а колико ако смо погодили 7 исхода?

Ако смо погодили свих 8 исхода, свака комбинација коју чини 5

[9] Џејмс Стирлинг (James Stirling, 1692–1770) – шкотски математичар.

парова је добитна, а њих има

$$\frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Ако смо погодили 7 исхода, свака комбинација коју чини 5 парова, али од 7 које смо погодили, је добитна, а њих има

$$\frac{7!}{5!(7-5)!} = 21.$$

Следи пример из рачунарског домена.

**Пример 1.4.12.** Размотримо следећи псеудокод алгоритма који одређује број троуглова који се могу формирати тако да су њихова темена одређена тачкама из задатог скупа од $n$ тачака равни:

**BEGIN**

**INPUT** $A = (A(1), A(2), \ldots, A(n))$;

$broj\_trouglova = 0$;

**FOR** $i = 1$ **TO** $n-2$

  **FOR** $j = i+1$ **TO** $n-1$

    **FOR** $k = j+1$ **TO** $n$

      **IF** $A(i), A(j), A(k)$ нису колинеарне

        $broj\_trouglova := broj\_trouglova + 1$;

**RETURN** $broj\_trouglova$

**END**

Колико пута алгоритам проверава колинеарност трију тачака?

Уочимо да ће свака тројка тачака бити проверена тачно једанпут. На пример, за $n = 4$, алгоритам ће редом проверити следеће тројке: $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,3,4)$ и $(2,3,4)$. Дакле, провериће све трочлане комбинације скупа од 4 (или у општем случају, $n$) елемента. У складу са Теоремом 1.4.10, одговор је $\frac{n!}{3!(n-3)!}$.

У Пододељку 1.3.2 најавили смо комбинаторни метод за доказивање биномних идентитета. Описно говорећи, тим методом врше се два пребројавања елемената неког скупа тако да резултат првог пребројавања буде једнак једној, а другог другој страни једнакости која се доказује. Први идентитет из следеће теореме доказан је овим методом. Тај идентитет познат је као *Вандермондов*[10] *идентитет*.

**Теорема 1.4.13.** *За* $n, r, s \in \mathbb{N}$ *важе једнакости*

*(1)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$ *и*

*(2)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}$.

*Доказ.* (1) Претпоставимо да се у некој просторији налази $r$ девојчица и $s$ дечака и нека је, из неког разлога, потребно изабрати $n$ деце независно од пола. У складу са Теоремом 1.4.10, то је могуће учинити на $\binom{r+s}{n}$ начина.

Са друге стране, из скупа девојчица можемо изабрати њих $k$ на $\binom{r}{k}$ начина, док за изабир $(n-k)$ дечака постоји $\binom{s}{n-k}$ начина. Сумирањем по $k$ добијамо да је укупан број начина избора $n$ деце једнак

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k},$$

одакле следи тврђење.

(2) Важи следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{s}{s-n-k}\\ &= \binom{r+s}{s-n}\\ &= \binom{r+s}{r+s-s+n}\\ &= \binom{r+s}{r+n},\end{aligned}$$

при чему прва једнакост следи на основу услова симетричности (Теорема 1.3.2) примењеног на $\binom{s}{n-k}$, друга једнакост следи на основу претходно доказаног идентитета (из ове теореме), а трећа поново на основу услова симетричности. ■

[10] Александар-Теофил Вандермонд (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735–1796) – француски математичар и хемичар.

Ова теорема користи се у ситуацијама када треба сумирати (по $k$) производ два биномна коефицијента. Приметимо да се идентитет из Теореме 1.3.16 добија када се у првом идентитету из претходне теореме замени $r = n$ и $s = n$, уз примену услова симетричности на $\binom{n}{n-k}$.

### 1.4.5 Неуређени избори елемената са понављањем

Број оваквих избора дат је следећом теоремом.

**Теорема 1.4.14.** *Број неуређених избора $k$ елемената скупа од $n$ елемената, уз дозвољено понављање приликом избора, једнак је*

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

*Доказ.* Уколико елементе скупа означимо са $1, 2, \ldots, n$, тада избор $k$ елемената можемо схематски представити распоређивањем маркера $\bullet$ у висини одговарајућих елемената који су раздвојени преградама. На слици је илустрован један избор 7 елемената скупа од 9 елемената:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet\bullet & & \bullet & \bullet & \end{array}.$$

Приметимо сада да је број избора $k$ елемената једнак броју избора $k$ позиција за маркере од $n+k-1$ могућих позиција (имамо још $n-1$ позиција за преграде које су на слици репрезентоване вертикалним линијама), што представља број неуређених избора (без понављања) $k$ елемената скупа од $n+k-1$ елемената, а он је, према Теореми 1.4.10, једнак количнику из (ове) теореме. ■

Следи једна илустрација.

**Пример 1.4.15.** На колико начина можемо распоредити 6 куглица у 10 кутија, ако се у једну кутију могу распоредити највише 4 куглице?

Ако за тренутак претпоставимо да се у сваку кутију може распоредити свих 6 куглица, онда је одговор следи директно из претходне теореме, на основу које за $n = 10$ и $k = 6$ (6 пута бирамо једну кутију из скупа од 10 кутија, уз могућа понављања приликом избора) добијамо 5005 избора. Сада од овог броја треба одузети недозвољене изборе, то јест оне код којих је једна кутија бирана 5 или 6 пута. Првих за сваку кутију има по 9, што је укупно 90, а других за сваку кутију по 1, што је укупно 10. Дакле, одговор је 5005-100=4905.

*Пермутације са понављањем* су пермутације мултискупа, то јест пермутације елемената који се могу понављати више пута. Најпре ћемо размотрити један пример, а потом доказати теорему која даје број оваквих пермутација.

**Пример 1.4.16 (анаграмирање).** Колико се речи може саставити размештањем слова речи МАТЕМАТИКА?

Уз мало труда читалац би могао пронаћи неке речи које имају смисла макар ако се раздвоје на више, рецимо МАТ И КАМАТЕ или ТА ИМАТЕ МАК, но овде се ради о анаграмирању које укључује и речи које немају смисла. Када би се разматрана реч састојала од 10 различитих слова, одговор би био једноставан – 10!, будући да би се тада радило о пермутацијама скупа од 10 елемената. Овде имамо понављања слова, што мало компликује рачун.

Слово А појављује се 3 пута, слова М и Т по 2 пута, а свих 10 слова треба распоредити на 10 позиција и одредити колико има таквих распореда.

Пошто на почетку имамо 10 слободних места, закључујемо да је број места за 2 слова М једнак $\binom{10}{2}$. Преостало је 8 слободних места, па је број места за 3 слова А једнак $\binom{8}{3}$. Слично, број места за 2 слова Т једнак је $\binom{5}{2}$. Коначно, број места за преостала 3 слова је 3! (то су заправо пермутације скупа од 3 елемента). Дакле, укупан број речи једнак је

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 151\,200.$$

Ни овај пример није тешко уопштити чиме долазимо до следеће теореме.

**Теорема 1.4.17.** *Број пермутација са понављањем мултискупа од $n$ елемената у којем се први елемент појављује $n_1$ пута, други елемент $n_2$ пута, ..., $k$-ти елемент $n_k$ пута, при чему важи једнакост $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, једнак је*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

*Доказ.* Уопштавајући рачун из претходног примера долазимо до закључка да је тражени број једнак

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\ldots-n_k)!}.$$

Након скраћивања разломака и коришћења једнакости из формулације теореме (из које следи да је други фактор у имениоцу последњег разломка једнак 1), долазимо до тражене једнакости. ∎

***Напомена 1.4.18.*** Вредност из претходне теореме можемо означити на начин уведен у Пододељку 1.3.1, то јест са

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Приметимо још и да та вредност не зависи од редоследа у којем су елементи укључивани у рачун, те да број пермутација (са понављањем) мултискупа од $n$ елемената није већи од број пармутација скупа од $n$ елемената.

Размотримо још један пример.

**Пример 1.4.19 (расподела поклона).** На колико начина можемо расподелити $n$ поклона групи од $k$ деце под претпоставком да се зна тачан број поклона које свако од њих треба да добије?

Означимо децу у математичком духу са $1, 2, \ldots, k$, и нека детету означеном са $i$ следује $n_i$ поклона, при чему важи једнакост $n = n_1 + n_1 + \ldots + n_k$. Приметимо сада да свакој расподели поклона одговара тачно једна пермутација мултискупа који садржи елементе $1, 2, \ldots, k$ и у којем се елемент $i$ појављује $n_i$ пута, што нас доводи до закључка да је број расподела поклона једнак

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Другим речима, Теорему 1.4.17 можемо формулисати и на следећи начин.

**Теорема 1.4.20.** *Број начина да се $n$ објеката расйореди у $k$ кутија тако да се у $i$-ту кутију расйоређује $n_i$ објеката једнак је*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

## Задаци

**1.** Из скупа од 10 особа треба изабрати 3 које ће заузети 3 функције. На колико начина се може извршити такав избор, ако је познато да једна особа може бити бирана на највише 2 функције?

**2.** Да ли у бинарним записима природних бројева мањих од 1000 има више јединица или нула? Образложити.

**3.** Колико има пермутација скупа $\mathbb{N}_n$, $n \geq 2$, код којих су елементи 1 и 2 несуседни?

**4.** Колико има бијективних пресликвања $\mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$ код којих се сваки елемент пресликава у елемент различит од њега?

**5.** Дате су 4 беле, 5, црвених, 6 плавих и 7 црних куглица. На колико начина можемо изабрати 10 куглица? Колико од тих избора садржи куглицу сваке боје?

**6.** На колико начина се 30 студената може распоредити у 4 групе од којих две броје по 5, а две по 10 студената? Шта је решење ако све 4 групе броје по 5 студената (10 остаје нераспоређено)?

**7.** Комбинаторним методом доказати адициону формулу (дату у Теореми 1.3.4).

**8.** Комбинаторним методом доказати биномне идентитете из задатка 5 (страна 42).

**9.** Колико има пресликавања $\mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$ која су монотоно неопадајућа, то јест код којих за $i < j$ важи $f(i) \leq f(j)$?

**10.** Колико се бројева може добити множењем елемената скупа $\mathbb{N}_5$, ако се елемент $n \in \mathbb{N}_5$ може искоритити највише $n$ пута у сваком од множења?

**11.** Колико има десетоцифрених природних бројева записаних помоћу цифара 1, 2 и 3? Колико има природних бројева чији тернарни запис (запис у систему са основом 3) има 10 цифара?

## 1.5 Генерисање пермутација и комбинација

Са пермутацијама смо се сусрели у оквиру Пододељка 1.4.3, док су комбинације заправо неуређени избори елемената (без понављања) обрађени у оквиру Пододељка 1.4.4. Овде ћемо рећи нешто више о њиховом генерисању, односно одређивању свих пермутација или одређивању позиције неке пермутације унутар уређеног скупа пермутација, и слично у случају комбинација.

### 1.5.1 Генерисање пермутација

Генерисање пермутација подразумева одређивање свих пермутација скупа од $n$ елемената у складу са неким правилом које одређује редослед у којем се генеришу. Такво правило истовремено даје и једно њихово уређење. Овде ћемо се детаљније задржати на лексикографском правилу које даје одговарајуће лексикографско уређење.

Нека је, као до сада, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Јасно је да се било који скуп од $n$ елемената може бијективно пресликати на $\mathbb{N}_n$, те је довољно размотрити пермутације скупа $\mathbb{N}_n$. Нека су надаље $A$ и $B$ две пермутације разматраног скупа. То јест, нека је

$$A = a_1 a_2 \ldots a_n,\ a_i \in \mathbb{N}_n\ (1 \le i \le n),$$
$$B = b_1 b_2 \ldots b_n,\ b_i \in \mathbb{N}_n\ (1 \le i \le n),$$

при чему наравно важи $a_i \neq a_j$, за $i \neq j$, и слично за другу пермутацију.

У *лексикографском уређењу*, пермутација $A$ налази се испред пермутације $B$ уколико важи

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k < b_k.$$

У складу са претходним правилом, важи следеће:

- прва пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ је $12\ldots n$,
- друга пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ је $12\ldots n(n-1)$,

  ⋮
- последња пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ је $n(n-1)\ldots 21$.

Ево једног примера.

**Пример 1.5.1.** Све пермутације скупа $\mathbb{N}_4$, уређене у складу са лексикографским правилом, су:

$$\begin{gathered}1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,\\ 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,\\ 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,\\ 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.\end{gathered}$$

Размотримо сада питање одређивања пермутације која следи након задате пермутације у лексикографски уређеном скупу пермутација скупа $\mathbb{N}_n$. Поступак ћемо описати наредним алгоритмом.

**Алгоритам 1 (наредна пермутација).** Алгоритам прихвата пермутацију $A = a_1 a_2 \ldots a_n$, а враћа наредну пармутацију у складу са лексикографским уређењем.

К1: Ако су бројеви $a_i$ $(1 \le i \le n)$ уређени у опадајући низ, онда је $A$ последња пермутација у лексикографском уређењу, па наредна не постоји. У супротном, прећи на следећи корак.

K2: Претражити пермутацију $A$ здесна налево до првог појављивања индекса $i$ за који важи $a_i < a_{i+1}$. (Будући да пермутација $A$ није последња, такав индекс постоји.)

K3: Одредити најмањи број $a_j$ који је већи од $a_i$, уз услов $i < j$.

K4: Заменити места бројевима $a_i$ и $a_j$, потом уредити у растући поредак све бројеве који се након замене налазе десно од $a_j$ и прећи на корак K5.

K5: Крај.

Алгоритам је интуитивно јасан, а формална основа за њега може се пронаћи у [31].

**Пример 1.5.2.** Користећи Алгоритам 1, одредити пермутацију која следи након пермутације $A = 42531$ (скупа $\mathbb{N}_5$).

У складу са алгоритмом, закључујемо да у нашем случају важи $i = 2$. У следећем кораку долазимо до тога да је најмањи број који је већи од $a_2 = 2$ и налази се десно од њега – број $a_4 = 3$. Заменом места бројевима 2 и 3 и потом уређењем бројева 1, 2 и 5 у растући низ долазимо до пермутације 43125 која следи након пермутације $A$.

Алгоритам за одређивање пермутације која претходи задатој у основи је веома сличан претходном.

У Примеру 1.5.1 генерисали смо све пермутације скупа $\mathbb{N}_4$ водећи се једноставном логиком заснованом на лексикографском уређењу. Алгоритам за лексикографско генерисање пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ утемељен је на Алгоритму 1. Једноставно, треба кренути од прве пермутације и узастопном применом тог алгоритма генерисати све остале.

### 1.5.2 Генерисање тражене и случајне пермутације

Постоји више начина на које се може одредити $k$-та пермутација у лексикографском уређењу. На пример, могуће је генерисати све пермутације, па потом одредити ону која је $k$-та по реду. Јасно је да је овакав метод неефикасан, нарочито ако се има у виду да број пермутација брзо расте. Други, ефикаснији, метод описан је у наредном алгоритму.

**Алгоритам 2 ($k$-та пермутација).** $k$-ту пермутацију $A = a_1a_2\dots a_n$ скупа $\mathbb{N}_n$ одређујемо на следећи начин:

- $a_1 = \left\lceil \frac{k}{(n-1)!} \right\rceil = a_1^p$. (Најмањи цео број који није мањи од $\frac{k}{(n-1)!}$.)
- $a_2$ је $\left\lceil \frac{k(1)}{(n-2)!} \right\rceil = a_2^p$-ти број у растућем поретку преосталих бројева, при чему важи

$$k^{(1)} = k - (a_1^p - 1)(n-1)!.$$

  Штавише, остатак пермутације $a_2 \dots a_n$ је $k^{(1)}$-та пермутација у лексикографском уређењу свих пермутација преосталих бројева.
- $a_3$ је $\left\lceil \frac{k(2)}{(n-3)!} \right\rceil = a_3^p$-ти број у растућем поретку преосталих бројева, при чему важи

$$k^{(2)} = k^{(1)} - (a_2^p - 1)(n-2)!.$$

$\vdots$

- $a_i$ је $\left\lceil \frac{k(i-1)}{(n-i)!} \right\rceil = a_i^p$-ти број у растућем поретку преосталих бројева, при чему важи

$$k^{(i-1)} = k^{(i-2)} - (a_{i-1}^p - 1)(n-i+1)!.$$

$\vdots$

Првих $(n-1)!$ пермутација у лексикографском уређењу пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ почињу бројем 1, следећих $(n-1)!$ почињу бројем 2, и тако редом. Затим, код првих $(n-2)!$ пермутација које почињу бројем 1 наредни број је 2, код следећих $(n-2)!$ тај број је 3, и тако редом. Претходни алгоритам заснован је управо на овим чињеницама. За више детаља и формални доказ коректности алгоритма видети [31].

**Пример 1.5.3.** Користећи Алгоритам 2, одредити 15. пермутацију скупа $\mathbb{N}_4$.

Дакле, важи $k = 15$ и $n = 4$. Први број пермутације одређен је са $a_1 = \left\lceil \frac{15}{6} \right\rceil = 3$.

За други број израчунавамо $k^{(1)} = 15 - 2 \cdot 6 = 3$, (са алгоритмом бисмо могли и овде да станемо јер добијамо да је остатак тражене пермутације једнак трећој пермутацији преосталих бројева ($\{1,2,4\}$), а она гласи 214), па заменом добијамо да је други број пермутације $a_2$ заправо $\lceil \frac{3}{4} \rceil = 2$-ги број у растућем поретку преосталих бројева, а то је 2.

За трећи број израчунавамо $k^{(2)} = 3 - 1 \cdot 2 = 1$, па заменом добијамо да је трећи број пермутације $a_3$ заправо $\lceil \frac{1}{1} \rceil = 1$-ви број у растућем поретку преосталих бројева ($\{1,4\}$), а то је 1. Преостали број 4 представља последњи број тражене пермутације.

Напослетку, решење је пермутација $A = 3214$.

За генерисање случајне пермутације скупа $\mathbb{N}_n$ користимо једноставан алгоритам заснован на функцији која даје случајно изабрани број скупа првих $k$ природних бројева. Алгоритам има $n$ корака. У првом случајно бира број који ће се налазити на првој позицији случајне пермутације, у другом из скупа преосталих $n-1$ бројева случајно бира број који ће се наћи на другој позицији, и тако редом.

Алгоритам није тешко формално записати. Такође, није тешко уверити се да овакав алгоритам униформно генерише пермутацију, то јест да све пермутације имају једнаке шансе да буду генерисане.

### 1.5.3 Генерисање комбинација

Овде ћемо такође размотрити лексикографско уређење, при чему је то уређење дефинисано на исти начин као раније. Будући да код комбинација елемената њихов поредак није битан, приликом њиховог генерисања узимаћемо у обзир представнике који су први у лексикографском уређењу свих пермутација једне исте комбинације. На пример, 123 је једна трочлана комбинација елемената скупа $\mathbb{N}_3$. Иста та комбинација може се записати на још 5 начина, као 132, 213, и тако даље. Пошто се ради о различитим записима исте комбинације, приликом генерисања користићемо један запис и то онај који је први у њиховом уређењу, дакле 123.

У складу са претходним, за лексикографско уређење комбинација $k$ елемената скупа $\mathbb{N}_n$ ($k \leq n$) важи следеће:

- прва комбинација је $12\ldots k$ (првих $k$ елемената),
- друга комбинација је $12\ldots(k-1)(k+1)$,

  $\vdots$
- последња комбинација је $(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)n$ (последњих $k$ елемената).

**Пример 1.5.4.** Све комбинације 3 елемента скупа $\mathbb{N}_5$, уређене у складу са лексикографским правилом, су:

$$123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.$$

Размотримо следећи схематски приказ у којем је сваком елементу скупа $\mathbb{N}_n$ придружен један бинарни индикатор (у схеми репрезентован маркером $\bullet$):

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \in \{0,1\}.$$

Јасно је да важи следећа лема.

**Лема 1.5.5.** *Уређена бинарна $n$-торка која садржи тачно $k$ јединица једнозначно одређује једну комбинацију $k$ елемената скупа $\mathbb{N}_n$.*

**Пример 1.5.6.** Ако је $n = 5$ и $k = 3$, онда петорка $(0, 1, 0, 1, 1)$ одговара комбинацији 245 и обратно.

На основу Леме 1.5.5, лексикографско уређење комбинација ($k$ елемената скупа $\mathbb{N}_n$) своди се на пермутације са понављањем мултискупа од $n$ елемената од којих су њих $k$ јединице, а остали нуле. Дакле, претходни опис лексикографског уређења комбинација можемо исказати и на $(0, 1)$-језику:

- прва комбинација одређена је пермутацијом $\underbrace{11\ldots1}_{k}00\ldots0$,
- друга комбинација одређена је пермутацијом $\underbrace{11\ldots1}_{k-1}010\ldots0$,

$\vdots$

- последња комбинација одређена је пермутацијом $00\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{k}$.

Сада није тешко одредити наредну комбинацију у односу на задату. Приметимо да свака комбинација изузев последње има $(0, 1)$-репрезентацију облика

$$a_1a_2\ldots a_{i-1}10\ldots01\ldots1.$$

Репрезентација се, дакле, састоји од префикса $a_1a_2 \dots a_{i-1}1$ који се завршава јединицом, иза којег следи ниска нула и потом ниска јединица (ова ниска јединица не мора да постоји). Наредна комбинација је облика

$$a_1a_2 \dots a_{i-1}01 \dots 10 \dots 0.$$

Другим речима, добија се од претходне тако што се префикс препише, затим се јединица са његовог краја замени нулом, потом допише потребан број јединица и све комплетира нулама. Све време водимо рачуна о томе да репрезентација садржи тачно $k$ јединица. Овакав опис одређивања наредне комбинације може се записати у виду формалног алгоритма, што овде нећемо радити.

**Пример 1.5.7.** Одредити комбинацију која, у складу са лексикографским уређењем, следи након комбинације 1456 скупа $\mathbb{N}_6$.

Датој комбинацији одговара репрезентација 100111, дакле префикс је 1. Њега преписујемо и потом јединицу од које се састоји замењујемо нулом, дописујемо 4 јединице и комплетирамо репрезентацију једном нулом. Решење је 011110, а оно даје комбинацију 2345.

Као у случају пермутација, алгоритам за генерисање комбинација $k$ елемената скупа $\mathbb{N}_n$ заснован је на алгоритму за одређивање наредне комбинације.

## Задаци

**1.** На којој позицији се налази пермутација 214356 у лексикографском уређењу пермутација скупа $\mathbb{N}_6$? Која пермутација следи након ње? Одредити 100. пермутацију истог скупа.

**2.** Одредити позиције пермутација код којих је друга цифра 2 у лексикографском уређењу пермутација скупа $\mathbb{N}_5$. Извести општи закључак.

**3.** На којој позицији се налази комбинација 246 у лексикографском уређењу комбинација 3 елемента скупа $\mathbb{N}_6$? Која комбинација следи након ње? Одредити 10. комбинацију истог скупа.

**4.** Користећи Алгоритам 1 написати програм (у неком програмском језику) за генерисање свих пермутација скупа $\mathbb{N}_n$. Написати сличан програм за генерисање свих комбинација $k$ елемената истог скупа.

**5.** Користећи Алгоритам 2 (за генерисање $k$-те пермутације), саставити сличан алгоритам за генерисање тражене комбинације из лексикографски уређеног скупа комбинација $k$ елемената скупа од $n$ елемената.

**6 (генерисање случајне комбинације).** Доказати да алгоритам који генерише случајну пермутацију скупа $\mathbb{N}_n$ (на начин описан на крају Пододељка 1.5.2), а затим првих $k$ елемената те пермутације проглашава случајном комбинацијом, униформно генерише комбинацију $k$ елемената скупа $\mathbb{N}_n$.

## 1.6 Функције генератрисе

Са низовима бројева до сада смо се сусрели у неколико наврата. У оквиру овог одељка упознаћемо се са функцијама које садрже комплетну информацију о пребројивим низовима, то јест функцијама генератрисама таквих низова. Коришћењем функција генератриса добићемо још једну варијанту биномне формуле, а размотрићемо и нека својства ових функција и објаснити како се оне могу применити у доказивању биномних идентитета. Функцијама генератрисама бавићемо се и у другом делу књиге, највише у Пододељку 2.3.4 и Одељцима 2.4–2.6.

### 1.6.1 Дефиниција и нотација

Сваком низу (рецимо, реалних) бројева

$$(a_n) = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$$

можемо једнозначно придружити степени ред

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

при чему је $x$ нека реална променљива. У случају да овај ред конвергира (у неком интервалу), његову суму називамо *функцијом генератрисом* низа $(a_n)$ и означавамо са $A$ $(= A(x))$. (Постоји и општији приступ у којем питање конвергенције не игра улогу, видети [1, 31].)

Читалац ће свакако приметити да између низа и овако формираног степеног реда нема неке суштинске разлике; једино што смо урадили је да смо чланове низа прогласили коефицијентима реда (тако да се $a_k$ налази уз $x^k$). Међутим, у даљем тексту ћемо видети предности оваквог разматрања.

За почетак, сумирањем степеног реда, када год је то могуће, добијамо сажетији облик функције генератрисе.

**Пример 1.6.1.** Низу $(a_n) = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ одговара степени ред $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Са одговарајућим сумом већ смо се сусрели у оквиру Пододељка 1.1.2. Том приликом закључили смо да је за $|x| < 1$ она једнака $\frac{1}{1-x}$.

Функција $\frac{1}{1-x}$ садржи све податке о степеном реду. Уколико диференцирамо функцију $k$ пута у тачки $x = 0$ и резултат помножимо са $\frac{1}{k!}$, добићемо коефицијент који се налази уз $x^k$. Другим речима, сума степеног реда садржи комплетну информацију о низу $(a_n)$. Функција генератриса једнозначно одређује (или генерише) низ $(a_n)$, па јој отуда и назив. Уколико желимо да назначимо да је $A$ функција генератриса низа $(a_n)$ писаћемо $(a_n) \longleftrightarrow A$.

Приметимо још један детаљ. Функцију генератрису низа из Примера 1.6.1 сумирали смо под претпоставком да променљива $x$ припада интервалу $(-1, 1)$, а потом диференцирали у тачки 0 како бисмо (уз додатно множење раније споменутим количницима облика $\frac{1}{k!}$) одредили коефицијенте, односно чланове низа. Овакве рестрикције не праве никакав проблем. Наиме, за нас је довољно да степени ред конвергира у било којем интервалу и да се потом сви његови коефицијенти могу одредити диференцирањем добијене суме у некој тачки тог интервала. На тај начин добијамо једнозначну кореспонденцију између суме степеног реда и одговарајућег низа.

***Напомена 1.6.2.*** У контексту функција генератриса, у литератури се може пронаћи различита терминологија. На пример, функције генератрисе могу се препознати под називима генераторске функције или генеришуће функције. Напоменимо још и да низови могу бити генерисани и другачијим степеним редовима (рецимо, користе се експоненцијални степени редови облика $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i$) којима се у овој књизи нећемо бавити.

У наставку ћемо доказати једну модификацију биномне формуле, а одређивању функција генератриса вратићемо се у првом наредном пододељку.

### 1.6.2 Биномна формула за целобројне експоненте

Да бисмо дошли до формуле из наслова морамо најпре доказати неколико помоћних тврђења.

**Лема 1.6.3.** *За $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ коефицијенат који се налази уз $x^k$ у развоју израза $(1 + x + x^2 + \dots)^n$ једнак је*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

*Доказ.* Коефицијент који се налази уз $x^k$ у производу

$$\underbrace{(x^0+x^1+x^2+\dots)\cdot(x^0+x^1+x^2+\dots)\cdots(x^0+x^1+x^2+\dots)}_{n}$$

једнак је броју избора по једног сабирка из сваког од фактора, уз услов да је сума степена изабраних сабирака једнака $k$. Јасно, у таквим изборима учествују само сабирци $x^0, x^1, \dots, x^k$. Размотримо сада низ

$$(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n}),$$

који се, дакле, састоји од $n$ јединица. Приметимо да је претходно описани избор $n$ сабирака еквивалентан избору $k$ јединица низа тако да се $i$-та јединица бира онолико пута колики је степен сабирка изабраног из $i$-тог фактора $(1 \le i \le n)$. Ово је ништа друго до неуређени избор $k$ елемената низа од $n$ елемената, уз дозвољено понављање приликом избора. На основу Теореме 1.4.14, број таквих избора управо је једнак биномном коефицијенту из ове теореме. ■

Предах уз један пример.

**Пример 1.6.4.** На колико начина можемо изабрати 5 куглица из скупа од 4 беле, 5 црвених и 6 плавих куглица?

Овај задатак може се решити комбинаторним методом; у питању је неуређени избор са понављањем. Уместо тога, размотримо полиноме

$$B(x) = \sum_{i=0}^{4} x^i, \quad C(x) = \sum_{i=0}^{5} x^i \quad \text{и} \quad P(x) = \sum_{i=0}^{6} x^i,$$

при чему први одговара белим, други црвеним, а трећи плавим куглицама. Приметимо сада да је број начина на које можемо изабрати 5 куглица једнак коефицијенту који се налази уз $x^5$ у производу ових полинома. У складу са претходном лемом, тај коефицијент једнак је $\binom{3+5-1}{5} - 1 = 20$. (Биномни коефицијент умањен је за 1, будући да није могуће изабрати 5 белих куглица.)

Следе две једноставне последице Леме 1.6.3.

**Лема 1.6.5.** *За $n \in \mathbb{N}$ и $|x| < 1$ коефицијенӣ који се налази уз $x^k$ у развоју израза $(1-x)^{-n}$ једнак је*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

*Доказ.* Директним рачуном добијамо:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)^n \\ &= \underbrace{\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x}}_{n} \\ &= (1+x+x^2+\dots)^n,\end{aligned}$$

те резултат следи на основу Леме 1.6.3. ■

**Лема 1.6.6.** *За* $n \in \mathbb{N}$ *и* $|x| < 1$ *коефицијент који се налази уз* $x^k$ *у развоју израза* $(x+1)^{-n}$ *једнак је*

$$\binom{-n}{k}.$$

*Доказ.* Замењујући $-x$ са $x$ у доказу претходне леме, добијамо

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^n = (1-x+x^2-x^3+\dots)^n,$$

па је отуда тражени коефицијент једнак

$$(-1)^k\binom{n+k-1}{k},$$

односно $\binom{-n}{k}$, на основу негације горњег индекса (Теорема 1.3.3). ■

Напокон, ево и најављене теореме. Овај резултат се у некој литератури може пронаћи под називом „уопштена биномна формула”.

**Теорема 1.6.7 (биномна формула за целобројне експоненте).** *За* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $|x| < 1$ *важи једнакост*

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k.$$

*Доказ.* За $n \in \mathbb{N}^*$ тврђење следи на основу биномне формуле (Теорема 1.3.5), јер су сви биномни коефицијенти $\binom{n}{k}$ за $k > n$ једнаки нули. За $n < 0$ тврђење следи на основу претходне леме. ■

Може се доказати да претходна теорема важи и у случају када је $n$ реалан број.

### 1.6.3 Одређивање функција генератриса

У складу са дефиницијом, под одређивањем функције генератрисе неког низа подразумевамо израчунавање суме одговарајућег степеног реда. У наставку ћемо се упознати са неким рачунским техникама које ћемо илустровати у неколико примера.

Нека су дати низови $(a_n) = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$ и $(b_n) = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$, и њихове функције генератрисе

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$$

и

$$B(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k + \dots.$$

Размотримо функције генератрисе низова који се добијају неким трансформацијама ова два низа.

*Сабирање низова.* Низу $(a_n)+(b_n) = (a_0+b_0, a_1+b_1, \dots, a_k+b_k, \dots)$ одговара функција генератриса

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_k + b_k)x^k + \dots &= a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots \\ &\quad + b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k + \dots \\ &= A(x) + B(x). \end{aligned}$$

*Множење низа скаларом.* За $c \in \mathbb{R}$ низу $c(a_n) = (ca_0, ca_1, \dots, ca_k, \dots)$ одговара функција генератриса

$$\begin{aligned} ca_0 + ca_1 x + \dots + ca_k + \dots &= c(a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots) \\ &= cA(x). \end{aligned}$$

*Померање низа за $k$ места улево.* Померањем низа $(a_n)$ за $k$ места улево, добијамо низ $(a_k, a_{k+1}, \dots)$ којем одговара функција генератриса

$$a_k + a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \dots = \frac{A(x) - (a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1}x^{k-1})}{x^k}.$$

*Померање низа за $k$ места удесно.* Померањем низа $(a_n)$ за $k$ места удесно, добијамо низ $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$ којем одговара функција генератриса

$$x^k A(x).$$

Размотримо сада неке трансформације функције генератрисе и њихов утицај на одговарајући низ.

*Замена $x$ са $cx$, $c \in \mathbb{R}$, у функцији генератриси.* Оваквом заменом у функцији генератриси $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$, добијамо функцију генератрису $a_0 + ca_1 x + \dots + c^k a_k x^k + \dots$ која одређује низ

$$(a_0, ca_1, \dots, c^k a_k, \dots).$$

Специјално, за $c = -1$ добијамо низ $(a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots)$.

**Пример 1.6.8.** Одредити функцију генератрису низа

$$\left(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\right).$$

(Суседни чланови низа су или једнаки или се наредни добија множењем претходног са $\frac{1}{4}$.)

Овакви задаци најчешће се решавају тако што се пође од неког низа чија је функција генератриса позната. Пођимо од низа $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ којем, за $-1 < x < 1$, одговара функција генератриса $A(x) = \frac{1}{1-x}$. У складу са уведеном нотацијом, то записујемо као

$$(1, 1, \dots, 1, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Заменом $x$ са $\frac{1}{2}x$ у функцији генератриси, добијамо

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right) \longleftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}x},$$

а затим заменом $x$ са $-x$, добијамо

$$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right) \longleftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2}x}.$$

Сабирање последње две функције генератрисе, даје

$$\left(2, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, \dots\right) \longleftrightarrow \frac{8}{(2-x)(2+x)}.$$

Сабирањем добијеног низа са истим низом помереним за једно место удесно, добијамо тражени низ и одговарајућу функцију генератрису:

$$\left(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\right) \longleftrightarrow \frac{8(1+x)}{(2-x)(2+x)}.$$

*Замена $x$ са $x^k$ у функцији генератриси.* Оваквом заменом у функцији генератриси $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$, добијамо функцију генератрису $a_0 + a_1 x^k + \dots + a_k x^{k \cdot k} + \dots$ која одређује низ

$$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_2, \dots).$$

Специјално, за $k = 2$ добијамо низ $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots)$.

**Пример 1.6.9.** Одредити функцију генератрису низа

$$(1, -1, 2, -2, 4, -4, \dots).$$

(Позитивни и негативни степени броја 2.)

Пођимо поново од константног низа:

$$(1, 1, \dots, 1, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}.$$

Заменом $x$ са $2x$ у функцији генератриси, добијамо

$$(1, 2, 4, 8, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-2x},$$

док замена $x$ са $x^2$, даје

$$(1, 0, 2, 0, 4, 0, \dots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-2x^2}.$$

Сабирањем овог низа са истим низом помереним за једно место удесно и помноженим са $-1$, долазимо до решења:

$$(1, -1, 2, -2, 4, -4, \dots) \longleftrightarrow \frac{1-x}{1-2x^2}.$$

*Диференцирање функције генератрисе.* Диференцирањем функције генератрисе $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$, добијамо функцију генератрису $A'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots$ која одређује низ

$$(a_1, 2a_2, \dots, k a_k, \dots).$$

*Интеграција функције генератрисе.* Интеграцијом функције генератрисе $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$, добијамо функцију генератрису $\int A(x)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_k}{k+1} x^k + \dots$ која одређује низ

$$\left(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_k}{k+1}, \dots\right).$$

**Пример 1.6.10.** Одредити функције генератрисе низова

$$(1, 4, 12, 32, \dots, (k+1)2^k, \dots) \quad \text{и} \quad \left(1, \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{8}{4}, \dots, \frac{2^k}{k+1}, \dots\right).$$

Пођимо од низа који се добија у другом кораку Примера 1.6.9:

$$(1, 2, 4, 8, \ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{1-2x}.$$

Први низ добијамо померањем претходног низа за једно место удесно и потом диференцирањем функције генератрисе. Дакле, важи

$$(1, 4, 12, 32, \ldots, (k+1)2^k, \ldots) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Други низ добијамо интеграцијом функције генератрисе полазног низа и потом померањем низа за једно место улево. Дакле, важи

$$\left(1, \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{8}{4}, \ldots, \frac{2^k}{k+1}, \ldots\right) \longleftrightarrow -\frac{\ln(1-2x)}{2x}.$$

### 1.6.4 Примена у доказивању биномних идентитета

Функције генератрисе могу послужити приликом доказивања биномних идентитета у којима се појављују суме производа биномних коефицијената. У таквим доказима користи се такозвани *метод змијског уља*, који је заправо општији и може се применити и код другачијих сумирања (не само у случају биномних коефицијената).

У методу змијског уља, најпре идентификујемо једну променљиву, рецимо $r$, од које зависи разматрана сума $S$ (друге променљиве третирамо као константе). У том случају, вредност суме је један низ који зависи од $r$. Другим речима, за разне вредности променљиве $r$ добијамо разне вредности целе суме, то јест чланове низа. Размотримо тај низ као функцију од $r$, дакле $f(r)$. Нека је надаље

$$A(x) = \sum_r f(r)x^r.$$

функција генератриса низа $f(r)$. Заменом $f(r)$ сумом $S$ добијамо двоструку суму која, након промене редоследа сумирања и израчунавања унутрашње суме (по $r$), даје коефицијенте функције генератрисе, то јест вредност суме $S$.

Овај (након првог читања, компликован) метод у суштини је врло једноставан и практично се своди на промену редоследа сумирања.

**Пример 1.6.11.** За природне бројеве $n$ и $r$, такве да важи $n \geq r$, доказати идентитет

**Пример 2.1.10.** Одредити најмањи природан број који при дељењу са 3 даје остатак 1, при дељењу са 5 даје остатак 2 и при дељењу са 12 даје остатак 4.

Означимо тражени број са $n$. Приметимо најпре да бројеви 3 и 12 нису узајамно прости. Будући да важи $n = 1 \pmod 3$ и $n = 4 \pmod{3 \cdot 4}$, закључујемо да важи $n = 0 \pmod 4$. Дакле, треба одредити најмањи број $n$ који је дељив са 4, а при дељењу са 3 и 5 редом даје остатке 1 и 2. Пошто важи $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, у складу са кинеском теоремом о остацима, постоји тачно један такав број у скупу $\mathbb{N}_{59}$ који је истовремено и најмањи.

Уколико означимо $S = \{3, 4, 5\}$ и, за $i \in S$,

$$K_i = \prod_{j \in S, j \neq i} j \quad \text{и} \quad K_i^* = \prod_{j \in S, j \neq i} j^* \bmod i,$$

тада важи

$$\begin{aligned} K_3 &= 20, & K_3^* &= 20^* \bmod 3 = 2, \\ K_4 &= 15, & K_4^* &= 15^* \bmod 4 = 3, \\ K_5 &= 12, & K_5^* &= 12^* \bmod 5 = 3. \end{aligned}$$

(Једноставно, $20^* \bmod 3$ је најмањи број којим треба помножити 20 тако да производ даје остатак 1 при дељењу са 3, и слично у осталим случајевима.) Коришћењем једнакости (2.4), добијамо:

$$\begin{aligned} n &= (1K_3K_3^* + 0K_4K_4^* + 2K_5K_5^*) \bmod 60 \\ &= (1 \cdot 20 \cdot 2 + 0 \cdot 15 \cdot 3 + 2 \cdot 12 \cdot 3) \bmod 60 \\ &= 112 \bmod 60 = 52. \end{aligned}$$

## Задаци

**1.** *Ератостеново*[14] *сито* један је од најстаријих алгоритама за одређивање простих бројева.

**Алгоритам 4 (Ератостеново сито).** Алгоритам прихвата низ бројева $T = (2, 3, \ldots, n)$, а враћа низ $P$ који садржи просте бројеве из низа $T$.

К1: Нека је $P = ()$ (празан низ).

[14] Ератостен из Кирене (276. пре н.е–194. пре н.е.) – грчки математичар и песник.

К2: Први члан низа $T$ уписати на почетак низа $P$. Уклонити тај и све чланове дељиве са њим из низа $T$.

К3: Уколико је низ $T$ празан прећи на К4, у супротном прећи на К2.

К4: Крај.

Имплементирати овај алгоритам у неком програмском језику. Пронаћи могућа побољшања алгоритма. (Новији алгоритам за одређивање простих бројева скупа $\mathbb{N}_n$ је такозвано *Еткиново*[15] *сито*. Постоје и (пробабилистички) алгоритми који генеришу велике просте бројеве.)

**2.** Доказати да је скуп простих бројева бесконачан. (Претпоставити супротно и потом размотрити производ свих простих бројева увећан за један.)

**3.** *Голдбахова*[16] *хипотеза* каже да сваки паран број већи од 2 може бити репрезентован у виду суме два проста броја. Ова хипотеза постављена је 1742. године и још увек није решена, стога „доказати или оповргнути Голдбахову хипотезу" не би био прикладан задатак, али рецимо може: саставити алгоритам који ову хипотезу проверава на неком коначном скупу.

**4.** *Леви факторијел* природног броја дефинишемо као $!n = \sum_{i=0}^{n-1} i!$. *Курепина*[17] *хипотеза* каже да за сваки природан број већи од 1 важи $D(n!, !n) = 2$. Саставити алгоритам који ову хипотезу проверава на неком коначном скупу.

**5.** Одредити најмањи природан број који при дељењу са 8 даје остатак 1, при дељењу са 7 даје остатак 2, при дељењу са 5 даје остатак 4 и при дељењу са 3 даје остатак 0. (Бројни системи у којим се бројеви репрезентују помоћу остатака при дељењу са задатим узајамно простим бројевима (модулима) називају се *резидуумски бројни системи*. У широкој литератури такозвани претпостављени резидуумски бројни систем је систем са модулима 8, 7, 5 и 3.)

## 2.2 Партиције бројева

У овом одељку бавићемо се композицијама и партицијама бројева. Изложићемо резултате који су примерени онима којима је ова књига првенствено намењена, а више детаља може се пронаћи у [2, 19].

[15] Артур Оливер Лонсдејл Еткин (Arthur Oliver Lonsdale Atkin, 1925–2008) – енглески математичар.

[16] Кристијан Голдбах (Christian Goldbach, 1690–1764) – немачки математичар.

[17] Ђурађ (Ђуро) Курепа (1907–1993) – српски математичар.

Поред основних својстава композиција и партиција бројева, навешће-мо један погодан начин за представљање партиција и доказати неке идентитете.

### 2.2.1 Композиције и партиције

*Композиција природног броја* $n$ на $k$ сабирака је уређена $k$-торка $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ природних бројева таква да важи $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_k$ називамо *сабирцима композиције*.

**Пример 2.2.1.** За $k = 2$ добијамо следеће композиције броја 4: (1, 3), (3, 1) и (2, 2). Надаље ћемо користити интуитивнији запис композиције у виду разлагања броја на сабирке. У складу са тим, све композиције броја 4 су:

$$\begin{aligned} k=1:&\quad 4,\\ k=2:&\quad 1+3,\ 3+1,\ 2+2,\\ k=3:&\quad 1+1+2,\ 1+2+1,\ 2+1+1,\\ k=4:&\quad 1+1+1+1. \end{aligned}$$

Укупно их је 8.

За композиције се у литератури користе и термини уређене партиције или уређена разлагања природног броја. Наредна два тврђења дају број композиција природног броја.

**Теорема 2.2.2.** *Број композиција природног броја $n$ на $k$ сабирака једнак је*

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

*Доказ.* Послужимо се следећом комбинаторном схемом:

$$n = 1\_1\_\ldots\_1.$$

Број цртица је $n-1$. Да бисмо добили $k$ сабирака, потребно је да на цртице распоредимо $k-1$ знакова $+$, а то можемо учинити на $\binom{n-1}{k-1}$ начина. (Неуређени избор елемената: бирамо $k-1$ цртица из скупа од $n-1$ цртица.)

Након распоређивања плусева, узастопне јединице (које се налазе на почетку, између два плуса или на крају) дају један сабирак. Другим речима, број композиција једнак је броју избора цртица на које распоређујемо плусеве, односно једнак је биномном коефицијенту из формулације теореме. ∎

**Теорема 2.2.3.** *Број композиција природног броја n једнак је* $2^{n-1}$.

*Доказ.* Користећи биномну формулу дату у Теореми 1.3.5 (за $x = 1$ и $y = 1$, видети и Пример 1.3.6), добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1},$$

одакле следи тврђење. ∎

Прелазимо сада на партиције бројева. *Партиција природног броја n* на $k$ сабирака је мултискуп $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ природних бројева, такав да важи $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_k$ називамо *сабирцима партиције*.

**Пример 2.2.4.** Слично, за $k = 2$ добијамо следеће партиције броја 4: $[1, 3], [2, 2]$. Као код композиција, користићемо запис у виду разлагања броја на сабирке. Дакле, све партиције броја 4 су:

$$\begin{aligned} k = 1 :&\quad 4, \\ k = 2 :&\quad 1+3,\ 2+2, \\ k = 3 :&\quad 1+1+2, \\ k = 4 :&\quad 1+1+1+1. \end{aligned}$$

Укупно их је 5.

Број партиција броја $n$ означавамо са $p(n)$, а број партиција броја $n$ на $k$ сабирака са $p_k(n)$. Партицију броја $n$ можемо записати и на следећи начин:

$$[1^{m_1},\ 2^{m_2},\ \ldots,\ n^{m_n}],$$

при чему ненегативни цели бројеви $m_1, m_2, \ldots, m_n$ означавају бројеве појављивања сабирака у мултискупу.

Из дефиниција је јасна разлика између композиције и партиције броја. Иако су композиције дефинисане као уређене $k$-торке, а партиције као мултискупови, јасно је да су суштински различите партиције броја истовремено и различите композиције истог броја. Са друге стране, више композиција може одговарати једној партицији. Једноставније, разлагања броја на сабирке која се разликују само у редоследу сабирака представљају различите композиције, а једну исту партицију.

Интересантно је да формула (која би представљала пандан Теореми 2.2.3) за број партиција произвољног природног броја не постоји. Број партиција може се одредити коришћењем рекурентних формула или функције генератрисе низа $(p(n))$, а за мале вредности $n$ број партиција можемо израчунати и директним рачуном.

**Пример 2.2.5.** Бројеви партиција првих 10 природних бројева дати су табелом:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(n)$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 |

Следи једна рекурентна формула.

**Теорема 2.2.6.** *Важи једнакост*

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k).$$

*Доказ.* Нека је

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

једна партиција броја $n$ на $k$ сабирака. Ако од сваког сабирка у овој једнакости одузмемо 1, добијамо једнакост

$$n - k = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_k - 1).$$

На овај начин смо од дате партиције броја $n$ добили партицију броја $n-k$. Уочимо да неки од сабирака могу бити једнаки 0, уколико су пре одузимања били једнаки 1. Последња једнакост даје једну бијективну кореспонденцију између скупа партиција броја $n$ на $k$ сабирака и скупа партиција броја $n-k$ на највише $k$ сабирака, одакле следи тврђење. ∎

Ево сада и функције генератрисе.

**Теорема 2.2.7.** *Функција генератриса низа* $(p(n))$ *одређена је са*

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}.$$

Ова теорема може се доказати разлагањем свих партиција броја $n$ на оне које садрже један фиксирани сабирак и на оне које га не садрже, те потом одређивањем функција генератриса низова таквих партиција. Детаљи се могу пронаћи у [19, 31].

**Пример 2.2.8.** Одредити све партиције броја 12 чији сабирци припадају скупу $\{2, 5\}$.

Оваквим партицијама одговара следећа функција генератриса:

$$P(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5}$$
$$= (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + \ldots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \ldots).$$

Тражени број партиција једнак је коефицијенту који се налази уз $x^{12}$, а будући да $x^{12}$ добијамо из

$$x^2 \cdot x^{10} + x^{12} \cdot 1 = 2x^{12},$$

закључујемо да је тражени број партиција једнак 2. (Није тешко закључити да су то партиције $[2^1, 5^2]$ и $[2^6, 5^0]$.)

### 2.2.2 Ферерсови дијаграми и неки идентитети

Партиције бројева погодно се могу представити коришћењем такозваних *Ферерсових*[18] *дијаграма*. Партиција неког броја се Ферерсовим дијаграмом представља распоређивањем маркера у врсте и колоне дијаграма тако да свака врста одговара сабирку из дате партиције. Уз то, приликом оваквог представљања сабирци партиције уређени су у нерастући низ, што значи да број маркера опада од прве ка последњој врсти. Као илустрација послужиће следећи пример.

**Пример 2.2.9.** Ферерсов дијаграм партиције $17 = 5+4+3+2+2+1$ дат је са:

$$\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

Слично, Ферерсов дијаграм партиције $7 = 4 + 1 + 1 + 1$ дат је са:

$$\begin{array}{llll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & & & \\
\bullet & & & \\
\bullet & & &
\end{array}$$

На први поглед, Ферерсов дијаграм не даје ништа ново, међутим ускоро ћемо се уверити да се разни идентитети могу елегантно доказати уколико се партиције представе преко оваквих дијаграма. Пре тога, још две дефиниције.

За две партиције броја $n$ кажемо да су (међусобно) *конјуговане* уколико се Ферерсов дијаграм једне добија заменом места врста и колона у Ферерсовом дијаграму друге. То јест, коришћењем матричне терминологије, уколико се Ферерсов дијаграм једне добија транспоновањем Ферерсовог дијаграма друге.

---

[18] Норман Меклеод Ферерс (Norman Macleod Ferrers, 1829–1903) – енглески математичар.

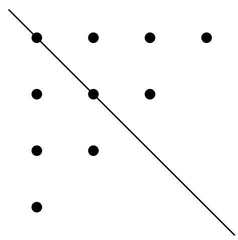
**Пример 2.2.10.** Ферерсови дијаграми партиција $5 = 3 + 2$ и $5 = 2 + 2 + 1$ редом су дати са

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \end{array},$$

одакле следи да су оне конјуговане.

За партицију броја кажемо да је *самоконјугована* уколико је њен Ферерсов дијаграм инваријантан у односу на транспоновање. Рецимо, партиција броја 7 из Примера 2.2.9 је самоконјугована.

***Напомена 2.2.11.*** Ферерсов дијаграм самоконјуговане партиције симетричан је као на Слици 2.1.



Слика 2.1: Симетричност Ферерсовог дијаграма самоконјуговане партиције.

За крај пододељка навешћемо неке идентитете.

**Теорема 2.2.12.** *Важе следећи идентитети.*

*(1) Број партиција броја $n$ на највише $k$ сабирака једнак је броју партиција броја $n + k$ на $k$ сабирака.*

*(2) Број партиција броја $n$ на највише $k$ сабирака једнак је броју партиција броја $n$ на сабирке који припадају скупу $\mathbb{N}_k$.*

*(3) Број партиција броја $n$ на парне сабирке једнак је броју партиција броја $n$ у којима се сваки сабирак појављује паран број пута.*

*(4) Број самоконјугованих партиција броја $n$ једнак је броју партиција броја $n$ у којима су сабирци различити и непарни.*

*Доказ.* Доказаћемо прва два идентитета. Друга два се доказују на сличан начин.

(1) Овај идентитет је последица Теореме 2.2.6, а оно што следи заправо је модификација доказа исте теореме. Нека је дата партиција броја $n+k$ на $k$ сабирака. Прва колона одговарајућег Ферерсовог дијаграма садржи тачно $k$ маркера, као у схематском приказу:

$$k \text{ врста} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right. \quad \cdots$$

Ако сада уклонимо прву колону из дијаграма, добијамо дијаграм неке партиције броја $n$ који има највише $k$ врста, а то управо значи да добијена партиција броја $n$ има највише $k$ сабирака. Овим је успостављена бијективна кореспонденција између скупа Ферерсових дијаграма који представљају партиције броја $n+k$ на $k$ сабирака и скупа Ферерсових дијаграма који представљају партиције броја $n$ на највише $k$ сабирака, одакле следи индентитет.

(2) Довољно је уочити да је Ферерсов дијаграм који представља партицију броја $n$ на највише $k$ сабирака конјугован Ферерсовом дијаграму једне партиција броја $n$ на сабирке који припадају скупу $\mathbb{N}_k$. Идентитет се добија успостављањем сличне бијективне кореспонденције. ■

## Задаци

**1.** Колико има композиција природног броја $n$ у којима су сви сабирци већи од 1?

**2.** Користећи Пример 2.2.5 и Теорему 2.2.6, израчунати вредности $p(11)$ и $p(12)$.

**3.** Одредити све самоконјуговане партиције броја 21.

**4.** Колико има троуглова код којих су дужине страница једнаке целим бројевима, а најдужа је једнака $n$?

**5.** Доказати да је број партиција броја $n$ на сабирке из скупа $\{1,2\}$ једнак броју партиција броја $n+3$ које имају тачно два сабирка.

**6.** Доказати да је број партиција броја $n$ код којих се сваки сабирак појављује мање од 3 пута једнак броју партиција истог броја на сабирке који нису дељиви са 3.

## 2.3 Рекурентне једначине

Рекурентне једначине су једначине које оперишу над низовима (који могу бити и коначни, али ћемо се у ономе што следи бавити само пребројивим низовима). Упознаћемо се са основним типовима ових једначина, а посебно ћемо размотрити такозване линеарне рекурентне једначине са константним коефицијентима. Навешћемо неколико метода за њихово решавање укључујући и метод у којем се користе функције генератрисе обрађене у Одељку 1.6. Овај одељак закључићемо једном применом рекурентних једначина у партицијама скупова. Са оваквим једначинама поново ћемо се сусрести у Одељцима 2.4–2.6.

### 2.3.1 Дефиниција, нотација и решења

За $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$ и $a_n, a_{n+1} \dots, a_{n+k-1} \in \mathbb{R}$ једначину облика

$$a_{n+k} = \phi(n, a_n, a_{n+1} \dots, a_{n+k-1}). \tag{2.5}$$

називамо *рекурентна једначина k-тог реда*. Јасно, функција $\phi$ дефинисана је на скупу $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^k$, док су $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$ узастопни чланови неког (реалног) низа.

***Напомена 2.3.1.*** У литератури (најчешће оној која није намењена студентима прве године) могу се пронаћи и другачије дефиниције рекурентне једначине. На пример, постоји приступ у складу са којим се члан низа изражава у функцији од свих чланова низа који му претходе. (У наставку ћемо се сусрести и са оваквим рекурентним једначинама.) Такође, рекурентне једначине могу се уопштити и на низове низова и, наравно, могу обухватати и комплексне бројеве.

Није тешко формирати рекурентне једначине које одређују неке од низова са којима смо се раније сретали. На пример, читалац може покушати то да учини у случају аритметичког, геометријског, хармонијског или неког сличног низа. Ми ћемо детаљније размотрити следећи пример.

**Пример 2.3.2.** Низ факторијела бројева скупа $\mathbb{N}^*$ може се дефинисати једначином

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)a_n, \\ a_0 = 1, \end{cases}$$

при чему услов $a_0 = 1$ називамо почетни услов.

Заиста, рекурзивном применом једнакости и коришћењем почетног услова добијамо низ једнакости

$$a_{n+1} = (n+1)a_n = (n+1)na_{n-1} = (n+1)n\cdots a_0$$
$$= (n+1)n\cdots 1 = (n+1)!,$$

што нас доводи до закључка да је $n$-ти члан овог низа одређен са

$$a_n = n!.$$

Овај пример даје јаснију представу о томе шта је то рекурентна једначина. За почетак, као што њен назив каже, то је једначина којом се рекурзивно дефинише неки низ бројева. Приметимо даље да су чланови низа одређени једначином, али и вредношћу нултог члана $a_0$. Другим речима, за разне вредности $a_0$ добијамо разне низове који задовољавају једну исту једначину. Даље, можемо приметити да се у примеру радило о једначини првог реда која је била задата уз један почетни услов (што се није случајно догодило). Напослетку, на крају примера израчунали смо вредност $n$-тог члана низа за произвољно $n \in \mathbb{N}^*$. Мотив за то је јасан – уколико можемо да одредимо произвољан члан низа, онда нам је познат и сам низ. Следе формалне дефиниције.

*Решење* рекурентне једначине (2.5) је било који низ $(a_n)$ такав да, за свако $n \in \mathbb{N}^*$, чланови тог низа $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$ задовољавају ту једначину. *Опште решење* исте једначине зависи од $k$ константи, то јест првих $k$ чланова низа (у претходном примеру то је био члан $a_0$). Различита решења рекурентне једначине добијају се из општег решења изборима вредности константи. Услове којима се једнозначно одређују вредности ових константи називамо *почетни услови*. Једно издвојено решење које је одређено неким почетним условима називамо *партикуларно решење*.

За произвољну вредност $n$, $n$-ти члан низа $(a_n)$ називамо *општи члан* тог низа. Одређивање општег решења једначине (2.5) у пракси се своди на одређивање општег члана низа који задовољава ту једначину у функцији од $n$ и константи које се потом могу одредити на основу почетних услова.

***Напомена 2.3.3.*** Читалац је можда приметио једну промену у нотацији, то јест да смо се у Делу 1 детаљније бавили $k$-тим чланом низа (рецимо, када смо у Одељку 1.6 одређивали коефицијент који се налази уз $x^k$, и слично), док се $n$ од раније појављује у улози индекса последњег члана коначног низа. У контексту рекурентних једначина, уместо $k$-тог разматраћемо $n$-ти члан низа будући да је такав приступ заступљен у најширој литератури.

Са парцијалним сумама неких пребројивих низова срели смо се у Пододељку 1.1.2.

**Пример 2.3.4.** Уколико је $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ парцијална сума низа $(a_n) = (a_0, a_1, \ldots)$, тада рекурентна једначина

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1},$$

уз почетни услов $S_0 = a_0$, једнозначно одређује низ парцијалних сума $(S_n)$.

У наставку ћемо размотрити неке врсте рекурентних једначина са посебним акцентом на линеарне рекурентне једначине са константним коефицијентима.

## 2.3.2 Линеарне рекурентне једначине

Једначину облика

$$f_0(n)a_n + f_1(n)a_{n+1} + \ldots + f_k(n)a_{n+k} = f(n) \tag{2.6}$$

називамо *линеарна рекурентна једначина* ($k$-тог реда).

Разликујемо две врсте линеарних рекурентних једначина:

- са *константним коефицијентима*, код којих су сви коефицијенти $f_i$ $(0 \leq i \leq k)$ константе и
- са *функционалним коефицијентима*, код којих су коефицијенти $f_i$ функције променљиве $n$.

За линеарну рекурентну једначину кажемо да је *хомогена* уколико важи $f(n) = 0$. У супротном, она је *нехомогена*. *Нормализовани облик* линеарне рекурентне једначине је облик у којем важи $f_k(n) = 1$.

За решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(r)})$ хомогене линеарне рекурентне једначине (2.6) кажемо да су *зависна* уколико се неко од њих може представити као линеарна комбинација осталих. У супротном, решења су *независна*. Независна решења су од посебног интереса и она су детаљније описана у наредној теореми.

**Теорема 2.3.5.** *Решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(r)})$ хомогене једначине* (2.6) *су независна ако и само ако важи*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \ldots & a_1^{(r)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r^{(1)} & a_r^{(2)} & \ldots & a_r^{(r)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

*Доказ.* Независност решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(r)})$ одмах даје и независност колона-вектора матрице $A$, што значи да је ранг матрице једнак $r$, односно важи $\det(A) \neq 0$.

Са друге стране, ако важи $\det(A) \neq 0$, онда је ранг матрице једнак $r$, што значи да су њене колоне линеарно независне, што опет значи да су разматрана решења независна. ■

Приметимо да су два решења $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)})$ зависна уколико су одговарајући чланови низова пропорционални, то јест уколико за свако $n \in \mathbb{N}^*$ важи једнакост $a_n^{(1)} = c a_n^{(2)}$, при чему је $c$ нека фиксирана константа.

**Теорема 2.3.6.** *Уколико су $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(k)})$ независна решења хомогене једначине* (2.6), *тада је опште решење одређено са*

$$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} + \ldots + c_k a_n^{(k)}, \tag{2.7}$$

*при чему су $c_1, c_2, \ldots, c_k$ неке константе.*

Доказ ове теореме заснован је на Теореми 2.3.5. Може се пронаћи у [1, 4, 31].

Да резимирамо, за сваку хомогену једначину облика (2.6) важе следеће чињенице:

- број $k$ у једнакости (2.7) подудара се са редом једначине (2.6),
- опште решење представља линеарну комбинацију $k$ независних решења и
- константе $c_1, c_2, \ldots, c_k$ одређују се на основу почетних услова.

*Опште решење нехомогене линеарне рекурентне једначине* облика је

$$a_n = h_n + p_n,$$

при чему је $h_n$ опште решење одговарајуће хомогене једначине, а $p_n$ партикуларно решење дате нехомогене једначине.

Постоји више метода за одређивање партикуларног решења нехомогене једначине (2.6). Један од њих је метод варијације константи, на којем се овде нећемо задржавати. Други метод подразумева да се разматрањем неколико чланова низа који задовољавају једначину уочи одређена правилност на основу које се наслути облик партикуларног решења, који се потом провери заменом у једначини. Опште узевши, „погађање” партикуларног решења је распрострањена техника нарочито код вештијих решавача оваквих једначина. Напослетку, постоје и развијени методи за одређивање таквог решења који зависе од облика функције $f$ из једначине (2.6). Више на ту тему рећи ћемо ускоро у случају линеарних рекурентних једначина са константним коефицијентима.

У складу са обликом једначине (2.6), линеарна рекурентна једначина ($k$-тог реда) са константним коефицијентима облика је

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \ldots + f_k a_{n+k} = f(n), \tag{2.8}$$

при чему су $f_0, f_1, \ldots, f_k$ реалне константе. Размотримо најпре хомогене линеарне рекурентне једначине са константним коефицијентима.

Решење хомогене линеарне рекурентне једначине са константним коефицијентима одређено је њеном карактеристичном једначином. *Карактеристична једначина* једначине (2.8) је једначина

$$f_0 + f_1 x + \ldots + f_k x^k = 0. \tag{2.9}$$

Сада ћемо детаљно описати начин одређивања општег решења хомогене једначине (2.8). Комплетна процедура своди се на одређивање $k$ независних решења, а сама независност решења са којима ћемо се ускоро сусрести следи из Теореме 2.3.5. Разликујемо два случаја.

- Ако су нуле $x_1, x_2, \ldots, x_k$ карактеристичне једначине (2.9) једноструке, онда је опште решење дато са

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_k x_k^n.$$

(Обратити пажњу на то да нуле карактеристичне једначине не морају бити реалне, што не мења ствар.)

- Ако постоји нула $x_i$ мултиплицитета $m$, онда она даје члан

$$c_i x_i^n + c_{i+1} n x_i^n + \ldots + c_{i+m-1} n^{m-1} x_i^n$$

у општем решењу хомогене једначине.

**Пример 2.3.7.** На пример, ако постоји трострука нула $x_1$, док су све остале једноструке, решење је облика

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 n x_1^n + c_3 n^2 x_1^n + c_4 x_4^n + \ldots + c_k x_k^n.$$

Прелазимо сада на одређивање партикуларног решења нехомогене једначине (2.8). У зависности од облика функције $f$ разликујемо већи број случајева, а овде ћемо детаљније обрадити наредни.

Ако важи $f(n) = P_d(n) b^n$, при чему је $P_d$ полином степена $d$, а $b$ реална константа, онда важи следеће:

- ако $x = b$ није нула карактеристичне једначине (2.9), онда партикуларно решење можемо потражити у облику

$$p_n = (A_0 + A_1 n + \ldots + A_d n^d) b^n;$$

- ако $x = b$ јесте нула мултиплицитета $m$, онда партикуларно решење можемо потражити у облику

$$p_n = n^m (A_0 + A_1 n + \ldots + A_d n^d) b^n.$$

Партикуларно решење биће одређено када се одреде непознати коефицијенти $A_0, A_1, \ldots, A_d$, које израчунавамо заменом добијеног облика тог решења у једначини (2.8). Наведимо и два подслучаја који следе директно из претходног.

(1) Ако је функција $f$ полином степена не већег од $d$, онда важи следеће:

- ако $x = 1$ није нула карактеристичне једначине, онда партикуларно решење можемо потражити у облику

$$p_n = A_0 + A_1 n + \ldots + A_d n^d;$$

- ако $x = 1$ јесте нула мултиплицитета $m$, онда партикуларно решење можемо потражити у облику

$$p_n = n^m (A_0 + A_1 n + \ldots + A_d n^d).$$

(2) Ако важи $f(n) = cb^n$, онда важи следеће:

- ако $x = b$ није нула карактеристичне једначине, онда партикуларно решење можемо потражити у облику

$$p_n = Ab^n;$$

- ако $x = b$ јесте нула мултиплицитета $m$, онда партикуларно решење можемо потражити у облику

$$p_n = n^m Ab^n.$$

**Пример 2.3.8.** Одредити опште решење рекурентне једначине

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 3^n. \tag{2.10}$$

У питању је нехомогена линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима. Поступак решавања је следећи:

(1) реши се одговарајућа хомогена једначина,

(2) одреди се једно партикуларно решење нехомогене једначине и

(3) опште решење је збир решења хомогене једначине и претходно одређеног партикуларног решења.

Спроведимо сада претходно описане кораке.
(1) Одговарајућа хомогена једначина дата је са

$$h_n = 4h_{n-1} - 3h_{n-2},$$

односно

$$h_n - 4h_{n-1} + 3h_{n-2} = 0,$$

одакле добијамо карактеристичну једначину

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Нуле карактеристичне једначине су

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Закључујемо да је опште решење хомогене једначине дато са

$$h_n = c_1 + c_2 3^n.$$

(2) С обзиром да је $x_2 = 3$ нула мултиплицитета 1, партикуларно решење треба потражити у облику

$$p_n = nA3^n.$$

Уврштавањем $p_n$ у једначину (2.10), одредићемо коефицијент $A$. Важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} p_n &= 4p_{n-1} - 3p_{n-2} + 3^n, \\ An3^n &= 4A(n-1)3^{n-1} - 3A(n-2)3^{n-2} + 3^n, \\ 0 &= 3^{n-2}\left(An3^2 - 4A(n-1)3 + 3A(n-2) - 3^2\right), \\ 0 &= 3^{n-2}(6A - 9). \end{aligned}$$

Пошто за свако $n$ важи $3^{n-2} \neq 0$, закључујемо да мора важити $A = \frac{3}{2}$. Стога је партикуларно решење дато са

$$p_n = \frac{1}{2}n3^{n+1}.$$

(3) Напослетку, опште решење једначине (2.10) дато је са

$$a_n = h_n + p_n = c_1 + c_2 3^n + \frac{1}{2}n3^{n+1}.$$

(Будући да је једначина другог реда, опште решење зависи од две константе.)

**Пример 2.3.9.** Одредити решење рекурентне једначине

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n3^n, \tag{2.11}$$

које задовољава почетне услове $a_0 = 2, a_1 = 3$.

Слично као у Примеру 2.3.8, одговарајућа хомогена једначина дата је са

$$h_n - 6h_{n-1} + 9h_{n-2} = 0,$$

док је њена карактеристична једначина

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Даље добијамо

$$x_1 = 3,\ x_2 = 3,$$

што значи да је опште решење хомогене једначине дато са

$$h_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n.$$

Партикуларно решење тражимо у облику (видети дискусију о облику овог решења)

$$p_n = (A_0 + A_1 n) n^2 3^n.$$

Уврштавањем $p_n$ у једначину (2.11), након једноставног алгебарског рачуна, добијамо

$$A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{1}{6}.$$

Дакле, партикуларно решење дато је са

$$p_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} n\right) n^2 3^n.$$

Као у претходном примеру, одавде добијамо да је опште решење једначине (2.11) дато са:

$$a_n = h_n + p_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} n\right) n^2 3^n. \tag{2.12}$$

Прелазимо на одређивање константи $c_1$ и $c_2$. Заменом најпре $n = 0$, а затим $n = 1$, у једнакости (2.12), добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} c_1 &= 2, \\ 3c_1 + 3c_2 + 2 &= 3, \end{aligned}$$

чије је решење

$$c_1 = 2,\ c_2 = -\frac{5}{3}.$$

Коначно, решење које задовољава задате почетне услове добијамо заменом добијених константи у једнакости (2.12):

$$a_n = h_n + p_n = 2 \cdot 3^n - \frac{5}{3}n3^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}n\right) n^2 3^n.$$

Сада ћемо демонстрирати једну примену у израчунавању сума са којима смо се сретали.

**Пример 2.3.10.** Неке суме којима смо се бавили у Одељку 1.1 можемо израчунати формирањем одговарајућих линеарних рекурентних једначина (у складу са Примером 2.3.4) и њиховим решавањем. На пример, суми из Примера 1.1.4 одговара рекурентна једначина

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^3,$$

уз почетни услов $S_1 = 1$.

Описаним поступком (који смо детаљно изложили у претходна два примера) долазимо до општег члана низа

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Не постоји општи метод за решавање линеарних рекурентних једначина са функционалним коефицијентима, нити се све могу решити. За неке типове постоје развијени методи (на пример, раније спомињани метод варијације константи). Израчунавање првих неколико чланова и потом индуктивно доказивање наслућеног решења метод је који увек треба имати у виду. Примењује се и метод смене којим се разматрана једначина поједностављује (а у неким случајевима, своди на линеарну са константним коефицијентима).

У наредна три примера решићемо неке линеарне рекурентне једначине са функционалним коефицијентима. Као што ће се испоставити, прве две могу се решити израчунавањем првих неколико чланова, па потом применом математичке индукције. Поступци за које смо се определили нешто су другачији и своде се на трансформације једначина и метод смене.

**Пример 2.3.11.** Одредити решење рекурентне једначине

$$na_n = (n-2)a_{n-1} + 2,$$

које задовољава почетни услов $a_0 = 1$.

Ако обе стране једнакости помножимо са $n-1$, добијамо једначину

$$na_n(n-1) = (n-1)(n-2)a_{n-1} + 2(n-1).$$

Ако сада изразимо члан $a_{n-1}$ из полазне једначине и уврстимо у претходну, затим урадимо исто са $a_{n-2}$, и тако редом, добијамо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} na_n(n-1) &= (n-2)(n-3)a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1), \\ &\vdots \\ &= 2(1+2+\ldots+n-1), \\ &= n(n-1). \end{aligned}$$

Сада једноставно закључујемо да важи $a_n = 1$. (На први поглед сложена једначина заправо има врло једноставно решење.)

До решења смо могли доћи и израчунавањем првих неколико чланова низа (сваки од њих једнак је 1) и потом индуктивним доказом.

**Пример 2.3.12.** Одредити решење рекурентне једначине

$$a_n = \frac{n}{n+1}a_{n-1} + 1,$$

које задовољава почетни услов $a_0 = 1$.

Уведимо смену $b_n = (n+1)a_n$. Нова једначина је

$$b_n = b_{n-1} + n + 1.$$

Пошто важи $b_0 = a_0$, закључујемо да почетни услов остаје исти, то јест важи $b_0 = 1$.

Ово је линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима и можемо је решити на раније описани начин. Вештији читалац ће прескочити ту процедуру и одмах уочити да је општи члан одређен са

$$b_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

одакле следи

$$a_n = \frac{(n+2)}{2}.$$

Као у претходном примеру, до истог решења могли смо доћи и израчунавањем првих чланова, те уочавањем зависности између њих. Наиме, парни чланови низа редом су једнаки $2, 3, 4, \ldots$, а непарни $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$. Напослетку, примена математичке индукције доводи до општег решења.

Размотримо сада нешто другачији тип једначине.

**Пример 2.3.13.** Одредити решење рекурентне једначине

$$a_n = \frac{n+2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i,$$

које задовољава почетни услов $a_0 = 1$.

За разлику од једначина које смо до сада решавали, у овој се $n$-ти члан низа изражава преко свих претходних (видети Напомену 2.3.1). Другим речима, број чланова низа са десне стране једнакости није константан.

Извршимо најпре неколико алгебарских трансформација дате једначине:

$$na_n = (n+2) \sum_{i=0}^{n-1} a_i,$$

$$n \sum_{i=0}^{n} a_i = 2(n+1) \sum_{i=0}^{n-1} a_i,$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i.$$

(Другу једнакост добили смо тако што смо обе стране прве једнакости сабрали са $n \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.)

Нека је сада $b_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n+1}$. Овом сменом долазимо до линеарне рекурентне једначине са константним коефицијентима

$$b_n = 2b_{n-1},$$

уз почетни услов $b_0 = 1$. Општи члан одговарајућег низа одређен је са

$$b_n = 2^{n-1},$$

одакле следи

$$a_n = (n+2)2^{n-2}.$$

### 2.3.3 Нелинеарне рекурентне једначине

Методи за решавање ових једначина не разликују се много од оних за решавање линеарних рекурентних једначина са функционалним коефицијентима. Овде ћемо изложити само два примера.

**Пример 2.3.14.** Одредити решење рекурентне једначине

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2},$$

које задовољава почетне услове $a_0 = 1$ и $a_1 = 2$.

Најпре се (рецимо, индукцијом) докаже да су сви чланови низа који задовољава дату једначину и почетне услове позитивни.

Сада логаритмовањем обе стране једначине, а затим сменом

$$b_n = \log_2 a_n,$$

добијамо линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n,$$

уз нове почетне услове $b_0 = 0$ и $b_1 = 1$.

Ову једначину решавамо описаним методом. Општи члан одговарајућег низа је

$$b_n = 2^n - 1,$$

што нас доводи до општег члана полазне једначине који је одређен са

$$a_n = 2^{2^n - 1}.$$

Низ који је решење претходне рекурентне једначине брзо расте.

Рецимо, важи $a_5 = 2^{31} = 2\,147\,483\,648$.

**Пример 2.3.15.** Одредити $n$-ти члан низа који задовољава једначину

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1},$$

уколико, рецимо, важи $a_0 = 10$.

Израчунавањем првих неколико чланова добијамо:

$$a_1 = \frac{a_0 - 1}{a_0 + 1}, \quad a_2 = -\frac{1}{a_0}, \quad a_3 = \frac{a_0 + 1}{-a_0 + 1} \quad \text{и} \quad a_4 = a_0.$$

Закључујемо да се чланови низа периодично понављају у групама од по 4. Коришћењем почетног услова, добијамо $a_1 = \frac{9}{11}$, $a_2 = -\frac{1}{10}$ и $a_3 = -\frac{11}{9}$, одакле следи да је $n$-ти члан низа одређен са

$$a_n = \begin{cases} 10, & n = 0 \pmod 4, \\ \dfrac{9}{11}, & n = 1 \pmod 4, \\ -\dfrac{1}{10}, & n = 2 \pmod 4, \\ -\dfrac{11}{9}, & n = 3 \pmod 4. \end{cases}$$

(У складу са нотацијом из Пододељка 2.1.1, $n = 0 \pmod 4$ значи да је $n$ природан број који даје остатак 0 при дељењу са 4, и слично у осталим случајевима.)

## 2.3.4 Решавање коришћењем функција генератриса

Нека је линеарна рекурентна једначина са константним коефицијентима, уз почетне услове, задата на следећи начин:

$$\begin{cases} f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \ldots + a_{n+k} = 0, \\ a_0 = c_0,\ a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Релација између оваквих једначина (које су задате у нормализованом облику) и функција генератриса дата је следећом теоремом.

**Теорема 2.3.16.** *Функција генератриса низа* $(a_n)$ *одређеног рекурентном једначином* (2.13) *облика је*

$$A(x) = \frac{P(x)}{f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \ldots + 1},$$

*при чему је $P$ полином степена (строго) мањег од $k$.*

*Доказ.* Јасно је да се функција генератриса низа $(a_n)$, која је сума неког конвергентног степеног реда, може записати у облику који је дат у теореми, при чему је $P$ такође сума неког степеног реда. Дакле, треба само доказати да је $P$ заправо полином степена мањег од $k$.

Једнакост из теореме можемо записати у следећем облику

$$P(x) = A(x)(f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \ldots + 1),$$

односно

$$P(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots)(f_0 x^k + f_1 x^{k-1} + \ldots + 1).$$

Коефицијент који се налази уз $x^{n+k}$ са десне стране ове једнакости, за $n \geq 0$, једнак је

$$f_0 a_n + f_1 a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}.$$

Међутим, пошто низ $(a_n)$ задовољава једначину (2.13), претходна вредност једнака је нули за свако $n \geq 0$, одакле следи тврђење. ■

Приметимо да се функција генератриса из претходне теореме може одредити израчунавањем коефицијената полинома $P$ на основу задатих почетних услова.

Уколико у имениоцу функције генератрисе променљиву $x$ заменимо са $\frac{1}{x}$ и потом тај именилац помножимо са $x^k$, добијамо израз из карактеристичне једначине (хомогене линеарне рекурентне једначине са константним коефицијентима) која је раније одређена са (2.9). Другим речима, функција генератриса траженог низа садржи комплетну информацију о карактеристичној једначини. Штавише, ако је њен иманилац записан у виду производа бинома, онда он одмах даје и нуле карактеристичне једначине (које од раније играју кључну улогу у одређивању општег члана низа).

Све ово даје један метод за решавање линеарних рекурентних једначина са константним коефицијентима коришћењем функција генератриса. У пракси се срећемо са нешто другачијим приступом (који је у суштини исти, уз различит редослед радњи, а важи и у случају када је функција $f$ константна). Илуструјмо тај приступ у два примера.

**Пример 2.3.17.** Одредити функцију генератрису низа који задовољава рекурентну једначину

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \tag{2.14}$$

и почетни услов $a_0 = 0$, а потом одредити и општи члан тог низа.

Једначини (2.14) одговара једначина

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}, \tag{2.15}$$

јер:

- члану $a_{n+1}$ одговара функција генератриса низа помереног за једно место улево (тако да је његов $n$-ти члан једнак $a_{n+1}$), то јест $\frac{A(x)-a_0}{x}$,
- члану $2a_n$ одговара функција генератриса $2A(x)$ и
- члан 1 је $n$-ти члан низа $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, односно одговара му функција генератриса $\frac{1}{1-x}$.

Даље решавамо једначину (2.15) по $A(x)$ (уз дати почетни услов):

$$\begin{aligned}
\frac{A(x) - a_0}{x} &= 2A(x) + \frac{1}{1-x},\\
\frac{A(x)}{x} &= 2A(x) + \frac{1}{1-x},\\
A(x)\left(\frac{1}{x} - 2\right) &= \frac{1}{1-x},\\
A(x)\left(\frac{1-2x}{x}\right) &= \frac{1}{1-x},\\
A(x) &= \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1-2x}{x}},\\
A(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.
\end{aligned}$$

Сада $A(x)$ потражимо у облику

$$A(x) = \frac{P_1}{1-x} + \frac{P_2}{1-2x}$$

($P_1$ и $P_2$ су полиноми чији је степен строго мањи од степена одговарајућих именилаца, то јест у питању су константе). Након краћег алгебарског рачуна (то јест, изједначавања коефицијената) добијамо $P_1 = -1$, $P_2 = 1$, односно

$$\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n.$$

Отуда је општи члан низа одређен са

$$a_n = 2^n - 1$$

(односно, једнак је коефицијенту који се налази уз $x^n$).

**Пример 2.3.18.** Уз текст из Примера 2.3.17, размотримо рекурентну једначину

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \\ a_0 = 0, a_1 = 1. \end{cases}$$

На сличан начин долазимо до једначине

$$\frac{A(x) - a_1 x - a_0}{x^2} = 2\frac{A(x) - a_0}{x} - A(x),$$

и потом, примењујући исти поступак, добијамо

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Следи алгебарски рачун:

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + n + 1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n. \end{aligned}$$

Отуда је општи члан низа одређен са

$$a_n = n.$$

### 2.3.5 Примена у партицијама скупова

Овде ћемо размотрити једну примену рекурентних једначина у израчунавању броја партиција коначног скупа. Даље излагање односи се на скупове првих $n$ природних бројева.

*Партиција скупа* $\mathbb{N}_n$ на $k$ подскупова је скуп његових непразних дисјунктних подскупова $S_1, S_2, \ldots, S_k$ таквих да важи

$$\mathbb{N}_n = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k.$$

Сматраћемо да је једина партиција празног скупа празан скуп. Партиције ћемо надаље записивати као у претходној једнакости, дакле у облику уније подскупова, а не скупа истих подскупова.

**Пример 2.3.19.** Све партиције скупа $\mathbb{N}_3$ су:

$$\begin{aligned} k=1: &\quad \{1,2,3\}, \\ k=2: &\quad \{1,2\}\cup\{3\},\ \{1,3\}\cup\{2\},\ \{2,3\}\cup\{1\}, \\ k=3: &\quad \{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}. \end{aligned}$$

Следеће дефиниције и пратећа тврђења говоре о броју партиција скупа. *Стирлингов број друге врсте*, у ознаци $S(n,k)$, једнак је броју партиција скупа од $n$ елемената на $k$ подскупова. Из Примера 2.3.19 закључујемо да, рецимо, важи $S(3,2)=3$.

***Напомена 2.3.20.*** Стирлингови бројеви прве врсте појављују се у контексту одређивања броја пермутација које задовољавају специфичне услове. Иако смо се пермутацијама бавили у оквиру Одељака 1.4 и 1.5, ове бројеве нисмо спомињали.

*Белов*[19] *број*, у ознаци $B(n)$, једнак је броју партиција скупа од $n$ елемената. Другим речима, важи једнакост

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k).$$

Доњи индекс суме једнак је нули јер смо укључили и празан скуп.

**Пример 2.3.21.** Белови бројеви $B(n)$, $n \le 10$, дати су табелом:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(n)$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 | 21 147 | 115 975 |

[19] Ерик Темпл Бел (Eric Temple Bell, 1883–1960) – шкотски математичар и књижевник.

Низови Стирлинговых бројева друге врсте и Белових бројева задовољавају одговарајуће рекурентне једначине. За почетак, важи следећа теорема.

**Теорема 2.3.22.** *Стирлингови бројеви друге врсте задовољавају следећу рекурентну једначину:*

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k).$$

*Доказ.* Све партиције скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ на $k$ подскупова можемо добити од партиција скупа $\mathbb{N}_n$ на $k-1$, односно $k$ подскупова. Наиме, свака таква партиција скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ добија се или проширивањем партиције скупа $\mathbb{N}_n$ на $k-1$ подскупова једночланим скупом $\{n+1\}$ (што даје први сабирак десне стране једнакости коју доказујемо) или додавањем елемента $n+1$ неком од подскупова који чине партицију скупа $\mathbb{N}_n$ на $k$ подскупова. Пошто се тај елемент може додати било којем од $k$ подскупова, свака партиција скупа $\mathbb{N}_n$ на $k$ подскупова даје $k$ нових партиција скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ на исти број подскупова (што даје други сабирак), одакле следи тврђење. ■

Подсетимо да је низ који задовољава неку рекурентну једначину једнозначно одређен тек када се задају и почетни услови. У складу са тим, будући да је низ Стирлингових бројева дводимензиони (зависи од два индекса, $k$ и $n$), додавањем почетних услова $S(n,1) = S(n,n) = 1$ долазимо до рекурентне једначине

$$\begin{cases} S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k), \\ S(n,1) = 1,\ S(n,n) = 1. \end{cases}$$

која одређује ове бројеве.

**Теорема 2.3.23.** *Белови бројеви одређени су рекурентном једначином*

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k),$$

*и почетним условом* $B(0) = 1$.

Доказ се може пронаћи у [2, 31]. У Одељцима 2.4–2.6 срешћемо се са још неким низовима бројева и рекурентним једначинама које их одређују.

## Задаци

**1.** Формирати рекурентну једначину која (уз одговарајући почетни услов) једнозначно одређује геометријски низ $(8,-12,18,-27,\ldots)$. Израчунати потом 100. члан овог низа.

**2.** Формирати рекурентну једначину којом се одређује број (сваког од раније обрађених) избора 3 елемента скупа $\mathbb{N}_n$. Потом решити ту једначину.

**3.** Решити рекурентне једначине

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \\ a_0 = 1,\, a_1 = 2 \end{cases}$$

и

$$a_{n+1} = 2a_n - 2.$$

**4.** Решити рекурентне једначине

$$\begin{cases} a_{n+3} + 2a_{n+2} + a_n = n^3 - 1, \\ a_0 = 1,\, a_1 = 2,\, a_2 = 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3 \cdot 2^n, \\ a_0 = 8,\, a_1 = 2. \end{cases}$$

**5.** Доказати да систем рекурентних једначина

$$\begin{cases} 2a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + 3b_n, \\ a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n, \\ a_0 = 1,\, b_0 = 2 \end{cases}$$

након линеарних трансформација даје једначину

$$\begin{cases} 2b_{n+1} = 2b_{n+1} - b_n, \\ b_0 = 2,\, b_1 = 3. \end{cases}$$

Решити ову једначину, а потом и цео систем.

**6.** Решити рекурентну једначину

$$\begin{cases} a_{n+2}^2 = 5a_{n+1}^2 - 4a_n^2, \\ a_0 = 4,\, a_1 = 6. \end{cases}$$

(Увести смену $b_n = a_n^2$.)

**7.** Решити рекурентне једначине

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - a_n a_{n+1}, \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 4}, \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

**8.** За дате рекурентне једначине и почетне услове одредити функције генератрисе одговарајућих низова, а потом и општи члан сваког од низова:

$$\begin{cases} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n, \\ a_0 = 0,\ a_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + 4n, \\ a_0 = 3,\ a_1 = 2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{n+2} - 6a_{n-1} + 9a_n = n + 2^n, \\ a_0 = 0,\ a_1 = 0. \end{cases}$$

**9.** Одредити све партиције скупа $\mathbb{N}_{12}$ на скупове који садрже по 6 елемената.

**10.** Доказати следеће рекурентне формуле за Стирлингове бројеве друге врсте

$$S(n+1,k) = \sum_{i=k-1}^{n} k^{n-i} S(i,k-1),$$

и

$$S(n+1,k) = \sum_{i=k-1}^{n} \binom{n}{i} S(i,k-1).$$

(Пошто су леве стране обе једнакости једнаке, у првом кораку може се доказати прва од њих, рецимо, коришћењем рекурентне формуле дате у Теореми 2.3.22. У другом кораку може се доказати једнакост између десних страна, а за то је погодан метод змијског уља описан у Пододељку 1.6.4; видети и Пример 1.6.11.)

**11.** Користећи другу формулу из претходног задатка доказати Теорему 2.3.23.

**12.** Доказати да је број партиција уређеног скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ таквих да се два суседна елемента не налазе у истом скупу партиције једнак $B(n)$ (то јест, Беловом броју који је једнак броју партиција скупа $\mathbb{N}_n$).

## 2.4 Фибоначијеви бројеви

Фибоначијеви[20] бројеви чине један од најпознатијих низова бројева, не само у математици већ и у осталим наукама. Читаоцу је вероватно познат појам златне поделе који се често спомиње у контексту пропорција у сликарству, другим уметностима и архитектури. У ономе што следи, даћемо неке одреднице Фибоначијевих бројева (на пример, одредићемо општи члан и функцију генератрису Фибоначијевог низа) и доказаћемо нека њихова својства. Размотрићемо и један низ бројева који су блиски Фибоначијевим.

### 2.4.1 Дефиниција Фибоначијевог низа

Фибоначи је до низа дошао бавећи се проблемом броја зечева (у некој литетатури, кунића) унутар једне колоније. Прецизније, уколико сваки пар зец-зечица (који су стари по барем 2 месеца) добију током следећег месеца пар младих, зеца и зечицу, и ако је у старту постојао само један пар, колико ће парова постојати након фиксираног броја месеци?

Нека је $F_n$ број парова зец-зечица након $n$ месеци. Према претпоставци важи $F_1 = 1, F_2 = 1$, док се $F_n$ (за $n \geq 3$) добија када броју парова $F_{n-1}$ из претходног месеца додамо новорођене парове који се добијају од $F_{n-2}$ парова који су постојали пре два месеца. Другим речима, добијамо рекурентну једначину $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и почетне услове $F_1 = 1,\ F_2 = 1$. У духу досадашњих разматрања, укључићемо и члан $F_0 = 0$, то јест нулти месец. Овај детаљ нема суштинског утицаја, а са друге стране разматрани низ има нулти члан као и други пребројиви низови којима смо се до сада бавили. Дакле, важи:

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \\ F_0 = 0,\ F_1 = 1. \end{cases} \tag{2.16}$$

*Фибоначијев низ* је низ бројева одређен једначином (2.16). У складу са тим, *Фибоначијеви бројеви* су чланови Фибоначијевог низа. Почетни чланови тог низа су:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \dots.$$

У наредним пододељцима рећи ћемо нешто више о Фибоначијевим и сродним бројевима. Много више на ту тему читалац може пронаћи у [33, 35].

[20] Леонардо Боначи, познатији као Фибоначи (Leonardo Bonacci, Fibonacci, око 1175–око 1250) – италијански математичар.

### 2.4.2 Златна подела

Тема овог пододељка је константа која представља решење једноставног геометријског проблема, а која се појављује у разним математичким аспектима (са неким од њих ћемо се сусрести у ономе што следи).

Размотримо дуж подељену на два дела ($d$ и $k$, уз услов $d > k$) тако да важи следећа пропорција:

$$\frac{d+k}{d} = \frac{d}{k}.$$

Другим речима, однос између дужине целе дужи и дужег дела једнак је односу између дужине дужег и краћег дела. Таква подела (дужи) позната је као *златна подела* (или *златни пресек*). Да бисмо одредили тражени однос, без губљења на општости, можемо претпоставити да је дужина краћег дела дужи једнака 1, то јест да важи $k = 1$. У том случају добијамо

$$\frac{d+1}{d} = d,$$

односно добијамо једначину

$$d^2 - d - 1 = 0, \tag{2.17}$$

чија су решења

$$d_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Пошто дужина дужи мора бити позитивна, закључујемо да важи

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

На први поглед Фибоначијеви бројеви немају везе са овим ирационалним бројем, међутим у наредном пододељку уверићемо се да није тако.

### 2.4.3 Неке одреднице и својства

Фибоначијеви бројеви имају изузетно велики број интересантних својстава до мере да постоје научне конференције које су посвећене само њима. Овде ћемо навести нека од њих, а више се може пронаћи у раније наведеној литератури.

Пошто Фибоначијев низ задовољава линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима која је, заједно са почетним условима, дата са (2.16), користећи метод за решавање оваквих једначина описан у Пододељку 2.3.2, можемо одредити општи члан тог низа.

**Теорема 2.4.1.** *Општи члан Фибоначијевог низа одређен је са*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{2.18}$$

*Доказ.* Карактеристична једначина која одговара рекурентној једначини (2.16) је једначина (2.17) коју смо решили у претходном пододељку. Стога је опште решење разматране рекурентне једначине одређено са

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Константе $c_1$ и $c_2$ одређујемо на основу почетних услова:

$$F_0 = 0 = c_1 + c_2,$$
$$F_1 = 1 = c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отуда следи

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

што даје

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

одакле следи једнакост (2.18). ■

Општи члан можемо одредити и на другачији начин.

**Теорема 2.4.2.** *Општи члан Фибоначијевог низа одређен је са*

$$F_n = \left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right], \tag{2.19}$$

*при чему је* $[x]$ *ознака за заокруживање на најближи цео број.*

*Доказ.* Оценимо разлику између $F_n$ и $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$. Једноставним рачуном, уз коришћење претходне теореме, добијамо

$$\left|F_n - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right|$$

$$= \left| \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

Пошто је апсолутна вредност разлике реалних бројева $F_n$ и $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ мања од $\frac{1}{2}$, закључујемо да важи једнакост (2.19). ■

Једнакост (2.19) практичнија је за коришћење од једнакост (2.18), јер захтева краћи рачун. Одредимо сада и функцију генератрису Фибоначијевог низа.

**Теорема 2.4.3.** *Функција генератриса Фибоначијевог низа одређена је са*

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

*Доказ.* Рекурентној једначини (2.16) одговара следећа једначина (упоредити Примере 2.3.17 и 2.3.18):

$$\frac{F(x) - F_1 x - F_0}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x).$$

Заменом $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$, добијамо

$$F(x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x},$$

одакле следи једнакост из формулације теореме. ■

Приметимо да се златна подела појављује у обе форме општег члана Фибоначијевог низа. Наредна теорема нам каже да количник два узастопна Фибоначијева броја тежи управо златној подели када $n \to \infty$.

**Теорема 2.4.4.** *Важе следеће једнакости:*

*(1)* $\displaystyle \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\frac{1}{1}}}}}_{n}$, *за* $n \geq 1$, *и*

*(2)* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

*Доказ.* (1) За $n = 1$ добијамо $\frac{F_2}{F_1} = 1$, односно, идентитет $1 = 1$. Претпоставимо да једнакост важи за $n-1$. Најпре ћемо члан $F_{n+1}$ представити у облику збира претходна два члана (на основу једначине (2.16)), а затим након трансформисања добијеног израза применити индуктивну хипотезу у четвртој једнакости и тиме закључити доказ:

$$\begin{aligned}\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \\ &= 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \\ &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{F_n}{F_{n-1}}} \\ &= 1 + \underbrace{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots\, 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}_{n}.\end{aligned}$$

(2) Приметимо да важи

$$1 < \frac{F_{n+1}}{F_n} < 2.$$

На основу овога следи да је низ $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$ ограничен, а уз то његови непарни чланови монотоно расту, а парни монотоно опадају (што није тешко доказати). У складу са тим, оба подниза конвергирају некој вредности $x \in (1, 2)$. Другим речима, у случају оба подниза постоји лимес $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ који је, на основу прве једнакости из ове теореме, једнак решењу једначине

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ово је једначина (2.17), што значи да је њено решење које припада интервалу $(1, 2)$ дато са

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

чиме је доказ завршен. ■

Доказаћемо још два идентитета.

**Теорема 2.4.5.** *Важи једнакост*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

*Доказ.* У рачуну који следи користимо једнакост $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$, скраћујемо чланове у узастопним сабирцима и на крају користимо једнакост $F_2 = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_i &= (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \ldots + (F_{n+2} - F_{n+1})\\ &= F_{n+2} - F_2\\ &= F_{n+2} - 1.\end{aligned}$$

■

**Теорема 2.4.6.** *За $n \geq 1$ важи једнакост*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

*Доказ.* За $n = 1$ добијамо $F_2F_0 - F_1^2 = -1$, односно идентитет $-1 = -1$. Претпоставимо да за $n \geq 2$ важи једнакост $F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$. Најпре ћемо члан $F_{n+1}$ представити у облику збира претходна два члана, а затим након трансформисања добијеног израза применити индуктивну хипотезу у четвртој једнакости и тиме закључити доказ:

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_n + F_{n-1})F_{n-1} - F_n^2\\ &= F_n(F_{n-1} - F_n) + F_{n-1}^2\\ &= -F_nF_{n-2} + F_{n-1}^2\\ &= -(-1)^{n-1}\\ &= (-1)^n.\end{aligned}$$

■

### 2.4.4 Лукасови бројеви

*Лукасов*[21] *низ* одређен је следећом рекурентном једначином

$$\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\\ L_0 = 2,\ L_1 = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Дакле, *Лукасови бројеви* припадају низу чији су почетни чланови:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \ldots.$$

Према неким изворима, управо је Лукас Фибоначијевим бројевима дао тај назив. Приметимо да Лукасов и Фибоначијев низ задовољавају исту рекурентну једначину, уз различите почетне услове.

[21] Франсоа Едуар Анатол Лукас (François Édouard Anatole Lucas, 1842–1891) – француски математичар. У складу са француским изговором, Лика, али се код нас чешће среће Лукас.

Као у случају Фибоначијевих бројева, одредимо општи члан и функцију генератрису Лукасовог низа.

**Теорема 2.4.7.** *Општи члан Лукасовог низа одређен је са*

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2.21}$$

*Доказ.* Карактеристична једначина је иста као код Фибоначијевог низа, одакле следи да су и нуле исте. Дакле, у складу са Теоремом 2.4.1, опште решење је

$$L_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Даље добијамо

$$L_0 = 2 = c_1 + c_2,$$
$$L_1 = 1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

односно

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1,$$

одакле закључујемо да је општи члан дат са (2.21). ∎

**Теорема 2.4.8.** *Функција генератриса Лукасовог низа одређена је са*

$$L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}. \tag{2.22}$$

*Доказ.* Рекурентној једначини Лукасовог низа одговара следећа једначина

$$\frac{L(x) - L_1 x - L_0}{x^2} = \frac{L(x) - L_0}{x} + L(x),$$

одакле, слично као у Теореми 2.4.3, добијамо једнакост (2.22). ∎

Важи следећа релација између Фибоначијевих и Лукасових бројева.

**Теорема 2.4.9.** *Ако су $(F_n)$ и $(L_n)$ редом Фибоначијев и Лукасов низ, онда за $n \geq 1$ важи*

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}.$$

*Доказ.* За $n = 1$ добијамо $L_1 = F_2 + F_0$, односно, идентитет $1 = 1$. Претпоставимо да за $n \geq 2$ важи једнакост $L_{n-1} = F_n + F_{n-2}$. Користећи рекурентну једначину (2.20), члан $L_n$ можемо представити у облику збира претходна два. Применом индуктивне хипотезе на оба сабирка, па затим прегрупирањем и коришћењем рекурентне једначине (2.16), добијамо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \\ &= (F_n + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-3}) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1}. \end{aligned}$$

■

## Задаци

**1.** Доказати следеће идентитете са Фибоначијевим бројевима:

- $F_{k+n} = F_{k-1}F_n + F_kF_{n+1}$, за $k \geq 1$, $n \geq 0$,
- $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$, за $n \geq 1$,
- $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$, за $n \geq 1$ и
- $F_0 + F_2 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$, за $n \geq 0$.

**2.** Доказати следећа тврђења.

- Свака два узастопна Фибоначијева броја су узајамно прости.
- Фибоначијев број $F_n$ дели Фибоначијев број $F_{kn}$, $k \geq 0$.
- Ако је $p$ прост број већи од 5, онда је тачан тачно један од исказа

$$p | F_{p+1} \quad \text{и} \quad p | F_{p-1}.$$

**3.** Доказати да је највећи заједнички делилац $D(F_k, F_n)$ Фибоначијевих бројева $F_k$ и $F_n$ једнак Фибоначијевом броју $F_{D(k,n)}$.

**4.** Доказати да важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{k+n}}{F_n} = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k .$$

**5.** *Трибоначијев низ* одређен је рекурентном једначином којом се члан низа изражава преко претходна три:

$$\begin{cases} T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \\ T_0 = 0, \ T_1 = 0, \ T_2 = 1. \end{cases}$$

Назив овог низа настао је комбиновањем речи „три” и „Фибоначи”. Израчунавањем почетних чланова добијамо низ:

$$0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \ldots.$$

Одредити општи члан и функцију генератрису овог низа.

**6.** Доказати да је за $n \geq 2$ општи члан Лукасовог низа одређен са

$$L_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

**7.** Доказати следеће идентитете са Лукасовим бројевима:

- $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$, за $n \geq 1$,
- $L_{n+2}L_{n-1} = L_{n+1}^2 - L_n^2$, за $n \geq 1$,
- $L_{2n}^2 = L_{4n} + 2$, за $n \geq 0$ и
- $L_kL_n - L_{kn} = (-1)^k L_{n-k}$, за $k \leq n$.

**8.** Доказати следеће релације између Фибоначијевих и Лукасових бројева:

- $F_{2n} = F_nL_n$, за $n \geq 0$,
- $5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}$, за $n \geq 0$,
- $F_{n+1}L_n - F_{2n+1} = (-1)^n$, за $n \geq 0$ и
- $2L_{k+n} = L_kL_n + 5F_kF_n$, за $k, n \geq 0$.

## 2.5 Каталанови бројеви

*Каталанов*[22] *низ* одређен је следећом рекурентном једначином:

$$\begin{cases} C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1}, \\ C_0 = 1. \end{cases} \tag{2.23}$$

[22] Јужин Шарл Каталан (Eugène Charles Catalan, 1814–1894) – белгијски математичар.

Отуда су почетни чланови Каталановог низа дати са:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots.$$

Рекурентна једначина (2.23) је нелинеарна, али се може решити што овде нећемо радити (поступак се може пронаћи у [31]). Општи члан одговарајућег низа је

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Размотримо сада следећи проблем. Нека је дат неки рачунски израз који се, рецимо, састоји од низа основних математичких операција над било којим бројевима или променљивим и (малих) заграда. Уколико сада уклонимо све осим заграда, добићемо један коректан низ заграда. На пример, израз

$$2x + \left(\frac{1}{4}(x^2 - 1)y + 3\right) - 2(x - y)$$

даје низ заграда $(())()$.

Значење термина „коректан” интуитивно је јасно. На пример, претходни низ је коректан јер се заграде заиста могу распоредити на такав начин, док рецимо низови $())($ и $)()(()$ то нису.

Колико има коректних низова $n$ парова заграда? Најпре један пример.

**Пример 2.5.1.** Колико има коректних низова 3 пара заграда?

Разликујемо три случаја:

- када низ почиње са три отворене заграде,
- када низ почиње са тачно две отворене заграде и
- када низ почиње тачно једном отвореном заградом.

Најпре, први случај даје тачно један коректан распоред. Након три отворене заграде морају уследити три затворене, то јест $((()))$.

Други случај даје следећа два распореда до којих није тешко доћи: $(()())$ и $(())()$.

Напослетку, трећи случај даје још два распореда: $()(())$ и $()()()$.

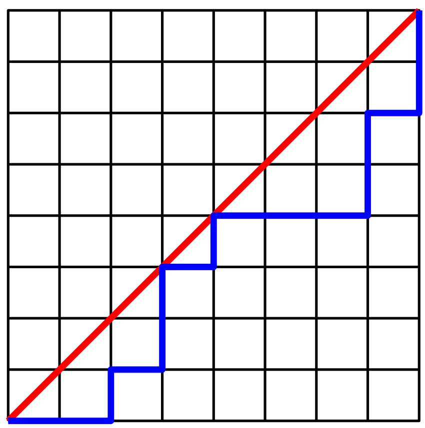
Закључујемо да укупно имамо 5 коректних низова 3 пара заграда.

Размотримо сада општи случај, то јест нека је дат коректан низ $n$ парова заграда. Јасно је да такав низ мора почети отвореном заградом коју некада касније морамо затворити, те га стога можемо записати у облику

$$(Z_1)Z_2,$$

при чему су $Z_1$ и $Z_2$ (могуће и празни) коректни поднизови заграда. Ово нас доводи до рекурентне једначине (2.23), при чему је $C_i$ број коректних распореда заграда који одговара низу $Z_1$, а $C_{n-i-1}$ број коректних распореда заграда који одговара низу $Z_2$. Дакле, можда неочекивано, али број коректних распореда $n$ парова заграда једнак је Каталановом броју $C_n$.

**Пример 2.5.2.** Нека је дата квадратна табла формата $n \times n$ (која се за $n = 8$ своди на шаховску таблу).



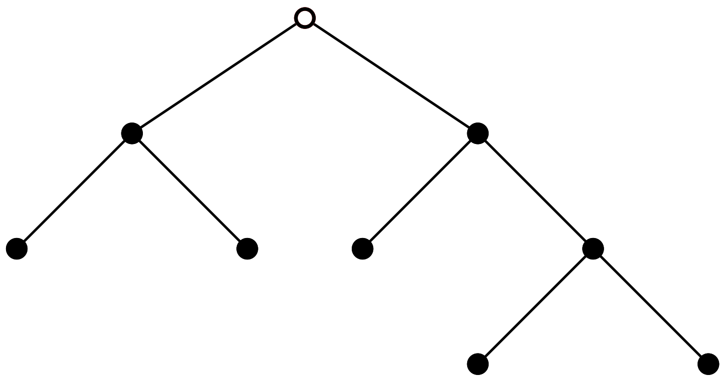
Пут који полази из доњег левог угла табле, завршава у горњем десном, а креће се по ивицама поља без пресецања дијагонале (између та два угла) и без кретања улево и наниже, називамо монотони пут (видети слику).

Оно што је интересантно је да је број монотоних путева на описаној табли формата $n \times n$ једнак двострукој вредности Каталановог броја $C_n$. Да бисмо се уверили у то, најпре приметимо да је број путева који се налазе испод дијагонале једнак броју путева који се налазе изнад (симетрични су у односу на дијагоналу). Сада је довољно приметити да кретање удесно дуж ивице једног поља у путу испод дијагонале одговара једној левој загради у коректном распореду, док кретање навише (такође, дуж ивице једног поља) одговара десној загради. На пример, илустровани пут даје распоред $(()())()((())())$.

Дефиницију стабла и, посебно, коренског стабла даћемо касније у Пододељцима 3.2.1 и 3.2.2. У наредном примеру ограничићемо се на потпуна коренска бинарна стабла која се могу рекурзивно дефинисати на следећи начин. Нека је дат коначан скуп објеката које називамо чворови и релација поретка *наследник* дефинисана на том скупу. Тада се *потпуно коренско бинарно стабло* састоји од

- једног чвора (који називамо *корен*) или
- два потпуна коренска бинарна стабла и једног додатног чвора таквих да су по дефиницији оба корена два стабла наследници новог чвора (који тиме постаје јединствени корен, док два стабла постају подстабла новог стабла).

У складу са дефиницијом, свако коренско бинарно стабло има јединствени корен. Чворове таквог стабла који немају наследнике називамо *листови*. Пример једног потпуног коренског бинарног стабла илустрован је на Слици 2.2.



Слика 2.2: Потпуно коренског бинарно стабло. Корен је илустрован другачије од осталих чворова.

Приметимо да сваки чвор који није лист има тачно два наследника, те у складу са тим наследнике сваког таквог чвора можемо уредити (на произвољан начин) тако што ћемо једног назвати левим наследником, а другог десним. Потпуно коренско бинарно стабло са таквим уређењем називамо *позиционо потпуно коренско бинарно стабло*. У том случају, можемо говорити и о левом и десном (позиционом) потпуном коренском бинарном подстаблу.

***Напомена 2.5.3.*** Дефиниција потпуног коренског бинарног стабла може се уопштити на произвољно потпуно $k$-арно стабло (у случају бинарног, важи $k = 2$). Такође, термин „потпуно” у истој дефиницији сугерише да сваки чвор који није лист има два наследника. У Пододељку 3.2.2 вратићемо се овим стаблима и том приликом дати општију дефиницију у складу са којом у коренском бинарном стаблу сваки чвор који није лист има највише два наследника. Таква коренска бинарна стабла некада се називају непотпуним, док се у таквој ситуацији у претходној дефиницији термин „потпуно” изоставља.

Ево најзад и примера.

**Пример 2.5.4.** Оно што је интересантно је да је, за $n \geq 0$, број позиционих потпуних коренских бинарних стабала чији број листова износи $n+1$ једнак Каталановом броју $C_n$. Заиста, коректне низове заграда такође можемо дефинисати рекурзивно:

- празан низ заграда је коректан и
- ако су $Z_1$ и $Z_2$ коректни низови заграда онда је и низ $(Z_1)Z_2$ такође коректан.

Рекурзивна дефиниција коректног низа заграда и дефиниција позиционог потпуног коренског бинарног стабла јасно сугеришу бијективну кореспонденцију између скупа који садржи све коректне распореде $n$ парова заграда и скупа који садржи сва таква стабла чији је број листова једнак $n+1$:

- празан низ заграда пресликава се у стабло које се састоји од једног чвора и
- ако се коректни низови заграда $Z_1$ и $Z_2$ пресликавају у стабла $T_1$ и $T_2$, онда се низ $(Z_1)Z_2$ пресликава у стабло које се добија увођењем новог чвора (корена) чији су леви и десни наследник редом корени стабала $T_1$ и $T_2$.

## Задаци

**1.** Одредити све коректне распореде 6 парова заграда који почињу са тачно две отворене заграде.

**2.** Конструисати позиционо потпуно коренско бинарно стабло које одговара низу заграда $(()(())())()(())$.

**3.** Конструисати сва позициона потпуна коренска бинарна стабла која имају 6 листова.

**4.** Доказати да, за $n \geq 2$, Каталанов број $C_n$ задовољава једнакост

$$C_n = \binom{2n-3}{n-1} + \binom{2(n-1)}{n} - \binom{2n-3}{n} - \binom{2(n-1)}{n+1}.$$

**5.** Користећи претходни задатак, одредити правило по којем се Каталанови бројеви могу одредити из Паскаловог троугла.

**6.** Доказати да се низ чији чланови припадају скупу $\{1, -1\}$, такав да је сума првих $k$ ($k < n$) чланова низа ненегативна, а сума свих чланова једнака нули, може генерисати низом Каталанових бројева (на сличан начин као у Примерима 2.5.2 и 2.5.4).

## 2.6 Бернулијеви бројеви

У овом одељку упознаћемо се са једним низом рационалних бројева и уопштењем неких од сума из Одељка 1.1. Излагање ћемо започети споменутим сумама, а у наставку ћемо дати две еквивалентне дефиниције низа и доказати нека његова својства.

### 2.6.1 Дефиниција

Неформално, оно што називамо Бернулијевим[23] бројевима је низ бројева $(B_0, B_1, \ldots)$ чији се чланови појављују у репрезентацији суме

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i^k, \tag{2.24}$$

(за произвољне природне бројеве $k$ и $n$) у виду полинома по променљивој $n$. Дакле, будући да је први сабирак једнак нули, ради се о суми степена првих $n-1$ природних бројева. Са неким сумама овог облика сусрели смо се у оквиру Одељка 1.1 и Пододељка 2.3.2. Конкретно, за $k = 1$ сума је одређена једнакошћу (1.3), за $k \in \{2, 3\}$ видети Примере 1.1.4 и 1.1.5, а за $k = 4$ видети задатак 5 из истог одељка. У Пододељку 2.3.2 напоменули смо да се овакве суме могу израчунати решавањем одговарајућих рекурентних једначина (видети Пример 2.3.10).

Ако детаљније размотримо суму (2.24), закључићемо да је она, за сваку вредност променљиве $k$, једнака неком полиному по променљивој $n$. Такав закључак, рецимо, следи из чињенице да је одговарајућа рекурентна једначина нехомогена линеарна чије је партикуларно решење неки полином по истој променљивој. Штавише, пратећи поступак из Примера 1.1.5 или 2.3.10, можемо израчунати и суме $S_5(n)$, $S_6(n)$, и тако редом. Упоређивањем резултата, долазимо до закључка

[23] Јакоб Бернули (Jacob Bernoulli, 1654–1705) – швајцарски математичар.

# -3-

# Теорија графова

Теорија графова је релативно нова математичка област. Иако се са нечим што називамо графом можемо сусрести и у ранијим резултатима (видети почетак Одељка 3.5), значајнији развој теорије јавља се у другој половини XIX века. За ову теорију карактеристична је широка примена у рачунарским, физичким, хемијским, биолошким, техничким, економским, организационим, социјалним и другим наукама. Више детаља може се пронаћи у [16, 17, 22], а неке примене навешћемо и у оквиру овог дела књиге.

У ономе што следи бавићемо се делом теорије графова који се ослања и надовезује на неке од садржаја Дела 1. Излагање ћемо започети основним појмовима, а затим ћемо се упознати са неким типовима графова. Након тога постепено ћемо се упознавати са многим предметима изучавања ове теорије. Посебну пажњу посветићемо алгоритмима и њиховим применама.

## 3.1 Основни појмови

У оквиру овог одељка упознаћемо се са свим типовима графова које ћемо касније изучавати. Објаснићемо када за графове кажемо да су изоморфни и дефинисати инваријанте графа. Навешћемо низ других дефиниција и примера, а излагање ћемо закључити матричним репрезентацијама графова.

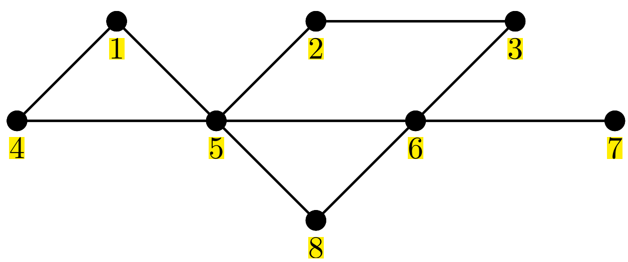
Претпостављамо да читалац има неку представу о графовима (то јест, да му је познато да се ради о неким дискретним структурама које се састоје од чворова повезаних гранама). У применама, чворови репрезентују неке објекте (који могу бити географске локације, јединице организационог система, делови хемијског једињења, особе или групе особа, и слично), а гране релације између тих објеката при чему постојање релације зависно од ситуације може представљати географску повезаност, комуникациони канал, могућност трансфера робе, и слично.

Посебно, многи проблеми са којима се сусрећемо у рачунарству могу се моделирати графовима. Неки од њих су конструкција рачунарских мрежа, организација и заштита података, развој вештачке интелигенције, проток информација, анализа слика и препознавање облика, сложеност алгоритама, кодирања и израчунавања. На пример, структура целокупне интернет мреже може бити представљена графом тако да је свака појединачна локација представљена нечим што називамо чвор графа, а уколико су локације повезане хиперлинковима тада су одговарајући чворови графа повезани гранама. У складу овим примером, јасно је да алгоритми који се разматрају у оквиру теорије графова представљају значајну целину теорије алгоритама. Следе формалне дефиниције и нотација.

### 3.1.1 Типови графова

*Прост граф* или само *граф* је уређени пар $G=(V,E)$ који се састоји од скупа $V$ чије елементе називамо *чворови* и скупа $E$ који чине двочлани подскупови скупа чворова, а чије елементе називамо *гране*. Уколико је потребно назначити о којем графу се ради, скуп чворова и скуп грана означаваћемо и са $V(G)$, односно $E(G)$.

Сматраћемо да је скуп чворова графа непразан и коначан. У таквој ситуацији број чворова графа означавамо са $n$ ($n \in \mathbb{N}$), док број грана означавамо са $m$ ($m \in \mathbb{N}^*$).




Слика 3.1: Пример (простог) графа.

Дакле, граф је једна релациона математичка структура чији се чворови $u$ и $v$ налазе у релацији уколико скуп $E$ садржи елемент $\{u,v\}$. У раду са графовима ретко када се користи скуповна терминологија из претходне дефиниције и одговарајућа нотација, а граф се најчешће представља графички (отуда му и назив). На Слици 3.1 илустрован је граф $G = (V, E)$, при чему су скупови $V$ и $E$ дати са

$$V = \mathbb{N}_8 \text{ и}$$
$$E = \{\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{5,6\},\{5,8\},\{6,7\},\{6,8\}\}.$$

У складу са оваквим приступом, кажемо да грана *спаја* два чвора којима је одређена, док за такве чворове кажемо да су *суседни*. За грану која спаја два чвора кажемо да је *инцидентна* са сваким од њих, а те чворове називамо *крајевима* гране. За гране инцидентне са истим чвором кажемо да су *суседне*.

Чворове графа ћемо, у зависности од контекста, означавати неким од ознака

$$u, v, w, \ldots, v_1, v_2, v_3, \ldots, 1, 2, 3, \ldots,$$

а гране неким од ознака

$$e, f, g, \ldots, e_1, e_2, e_3, \ldots, uv, uw, vw, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, 12, 13, 23, \ldots.$$

*Степен чвора* $u$, у ознаци $d_u$, једнак је броју грана инцидентних са тим чвором. *Околином чвора* $u$, у ознаци $N(u)$, називамо скуп свих чворова суседних том чвору. *Минимални степен чвора* у графу означаваћемо са $\delta$, а *максимални степен чвора* са $\Delta$.

У наставку ћемо користити следеће ознаке. Уколико је $u$ произвољан чвор, а $e$ произвољна грана графа $G$, онда са $G - u$ означавамо граф који се добија уклањањем чвора $u$ (и свих грана инцидентних са њим) из $G$ и, слично, са $G - e$ означавамо граф који се добија уклањањем гране $e$. Исто тако, уколико $e$ није грана графа $G$, тада $G + e$ означава неки граф који се добија њеним додавањем графу $G$.

Поред простих графова постоје још неки типови графова. Уместо формалних дефиниција даћемо њихове описе и један пример.

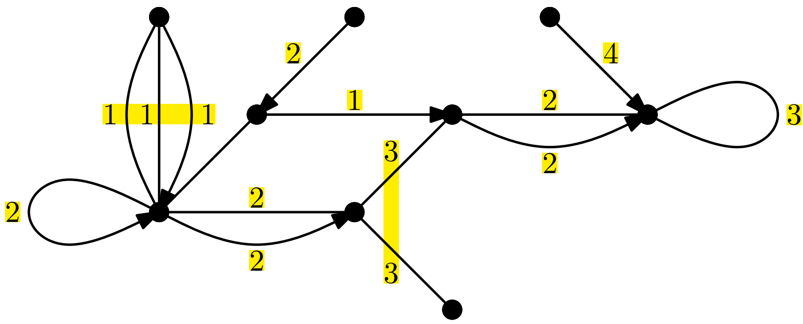
*Граф са петљама* допушта постојање грана чија су оба краја један исти чвор.

*Мултиграф* је граф у којем је допуштено постојање више грана између два чвора. (У некој литератури мултиграфови обухватају и графове са петљама.)

*Тежински граф* је граф чијој је свакој грани придружена нека нумеричка вредност. Ту нумеричку вредност називамо *тежина гране*. Прост граф може бити разматран као специјалан случај тежинског графа чије све гране имају тежину 1.

*Усмерени граф* (у некој литератури, *оријентисани* граф или *диграф*) је тип графа чија свака грана може поседовати усмерење од једног чвора са којим је инцидентна ка другом таквом чвору. Улога усмерења зависи од контекста. Најчешће, чвор од којег иде усмерење је у релацији са чвором ка којем иде, али не и обратно. У таквом контексту, грана без усмерења је (подразумевано) двосмерна. Грану усмереног графа која је усмерена од чвора $u$ ка чвору $v$ разматраћемо као уређени пар $(u, v)$.

**Пример 3.1.1.** Наравно, могуће су и комбинације споменутих типова графова, па тако на пример можемо говорити о усмереном тежинском мултиграфу са петљама. На слици је илустрован један такав граф.




***Напомена 3.1.2.*** У наставку текста, када год кажемо „граф” имаћемо у виду прост граф дефинисан на почетку пододељка. У складу са тим, све дефиниције и тврђења односе се на (просте) графове, изузев ако није другачије наглашено! Многа тврђења могу се уопштити и на остале типове графова или већ важе за неке од њих.

Следе два једноставна тврђења.

**Теорема 3.1.3.** *Сума степена чворова графа једнака је двоструком броју грана, то јест важи једнакост*

$$\sum_{i=1}^{n} d_{u_i} = 2m.$$

*Доказ.* Приликом сумирања ових сабирака, сваку грану бројимо тачно два пута, те отуда следи тражена једнакост. ■

**Теорема 3.1.4.** *Број чворова непарног степена графа није непаран.*

*Доказ.* На основу претходне теореме, сума степена свих чворова није непарна. Пошто исто важи и за суму парних степена, закључујемо да и сума непарних степена такође није непарна. ■

Претходне две теореме важе за све типове графова изузев оних који садрже петље. Наиме, у складу са дефиницијом степена чвора, петља увећава степен чвора са којим је инцидентна (а тиме и суму степена свих чворова) за 1, док грана која није петља исту суму увећава за 2.

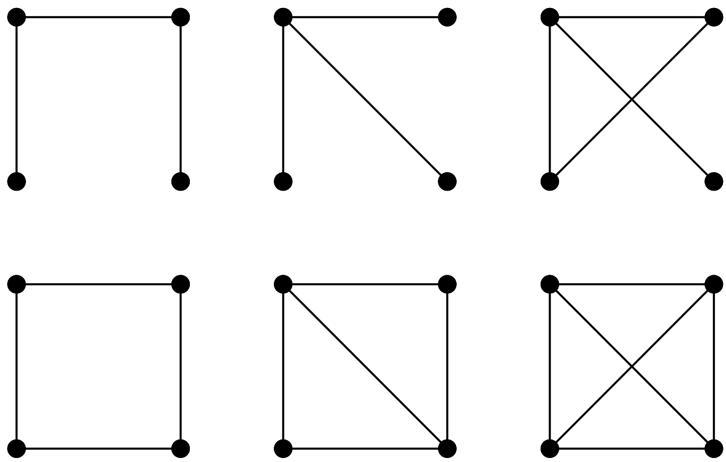
### 3.1.2 Изоморфизми графова и инваријанте

За графове $G$ и $H$ кажемо да су *изоморфни* уколико постоји бијективно пресликавање скупа чворова једног на скуп чворова другог које чува суседства између чворова. Практично, графови су изоморфни уколико се разликују само у означавању чворова.

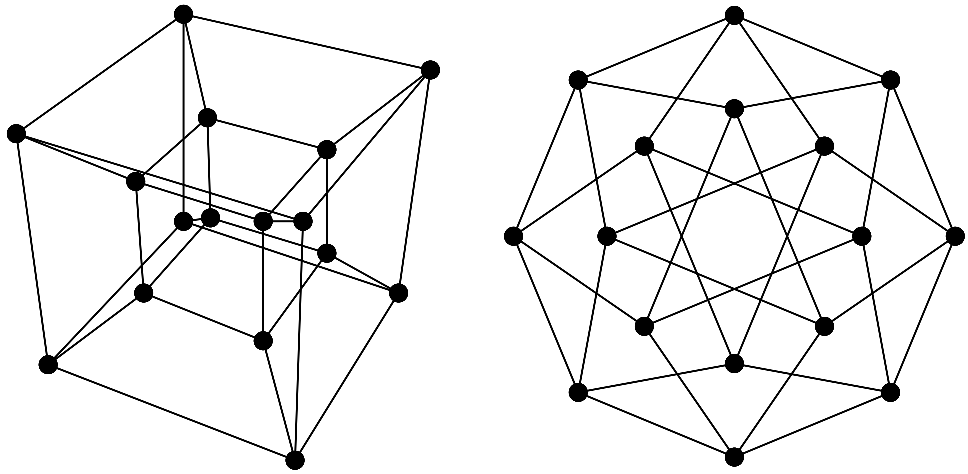
***Напомена 3.1.5.*** У некој литератури заступљен је нешто другачији приступ у складу са којим су изоморфни графови идентификовани (то јест, изоморфни графови разматају се као један исти граф). Јасно је да између два приступа нема крупних разлика и да се оне своде на разлике у терминологији.

**Пример 3.1.6.** Дефиниција повезаног графа дата је у наставку, прецизније на страни 132. У овом тренутку рећи ћемо да је граф повезан уколико се од сваког чвора може доћи до било којег другог чвора „крећући” се по гранама тог графа. У супротном, граф је неповезан.

Сви неизоморфни повезани графови са 4 чвора илустровани су на слици.



Графове из претходног примера одредили смо водећи се једноставном логиком, док у општем случају испитивање изоморфности два графа није једноставно. На Слици 3.2 илустрована су два изоморфна графа чији је заједнички назив *четвородимензиона коцка*. Општије, граф чији се скуп чворова састоји од свих уређених бинарних $k$-торки и чија су чворови суседни ако и само ако се одговарајуће $k$-торке разликују тачно у једној координати називамо *$k$-димензиона коцка*.



Слика 3.2: Четвородимензиона коцка (преузето из [30]).

Са порастом броја чворова број неизоморфних графова брзо расте. У следећој табели дат је број неизоморфних повезаних графова са највише 10 чворова:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | 1 | 1 | 2 | 6 | 21 | 112 | 853 | 11 117 | 261 080 | 11 716 571 |

.

*Инваријанта графа* је функција дефинисана на скупу графова која има исту вредност за све изоморфне графове. Инваријанте графова предмет су широких истраживања, а до сада смо се већ сусрели са неким од њих. На пример, то су број чворова $n$, број грана $m$, минимални степен чвора $\delta$ или максимални степен чвора $\Delta$. У ономе што следи сретаћемо се са многим другим инваријантама.

*Подграф* графа $G = (V, E)$ је граф $G' = (V', E')$ чији је скуп чворова подскуп скупа чворова графа $G$, а скуп грана подскуп скупа грана истог графа, то јест важи

$$V' \subseteq V,\, E' \subseteq E.$$

Неформално, кажемо да граф $G$ садржи граф $G'$ и да се $G'$ налази у $G$.

*Индуковани подграф* графа $G = (V, E)$ добија се уклањањем произвољног скупа чворова графа $G$ (тиме и грана инцидентних са њима). Сваки индуковани подграф истовремено је и подграф, док обратно не важи.

*Комплемент* графа $G = (V, E)$ је граф $\overline{G} = (V, \overline{E})$ који има исти скуп чворова $V$ и у којем су чворови суседни ако и само ако нису суседни у графу $G$. За граф кажемо да је *самокомплементарни* уколико је изоморфан свом комплементу. Читалац се може уверити да је у Примеру 3.1.6 наведен један самокомплементарни граф.

### 3.1.3 Шетње, стазе и путеви

*Шетња* у графу је низ облика $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k)$ чији су чланови наизменично чворови и гране тог графа такви да је грана $e_i$ инцидентна са чворовима $v_i$ и $v_{i+1}$ $(1 \le i \le k-1)$. Кажемо да шетња повезује (или спаја) чворове $v_1$ и $v_k$. Шетња је *затворена* ако важи $v_1 = v_k$, а у супротном је *отворена*. *Дужина шетње* једнака је броју грана које садржи. Неформално, кажемо да шетња пролази чворовима и гранама које садржи. Приметимо да шетња истим чвором или истом граном може проћи више пута.

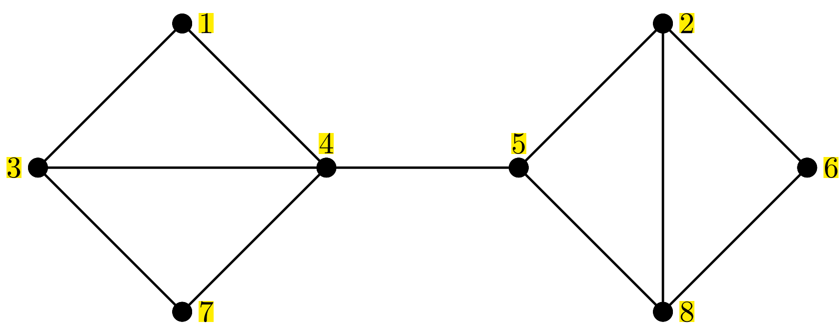
***Напомена 3.1.7.*** Шетњу у графу најчешће ћемо означавати онако како смо то учинили у претходној дефиницији, дакле навођењем чворова и грана. Уколико гране шетње не играју улогу у контексту у којем се она разматра, користићемо и сажету нотацију облика $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, при чему се подразумева да су чворови који су суседни у низу суседни и у разматраном графу.

*Стаза* у графу је шетња која сваком граном пролази највише једанпут (произвољним чвором може проћи и више пута).

*Пут* у графу је шетња која сваким чвором (тиме, и сваком граном) пролази највише једанпут.

Слично, *пут у усмереном графу* (или *усмерени пут*) одређен је низом различитих чворова $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ таквим да тај усмерени граф садржи гране $(v_i, v_{i+1})$, за $1 \le i \le k-1$. Са путевима у усмереним графовима нећемо се сретати пре Одељка 3.10.

**Пример 3.1.8.** Једна шетња у графу са слике (у складу са сажетом нотацијом из Напомене 3.1.7) је $(1, 3, 4, 5, 2, 8, 5, 4, 7)$. Друга шетња, која је истовремено и стаза, је рецимо $(3, 1, 4, 7, 3, 4, 5)$, а трећа шетња, која је и стаза и пут, је рецимо $(1, 3, 7, 4, 5, 2, 6)$.




Повезаност графа неформално смо увели у Примеру 3.1.6. Формална дефиниција не разликује се много. Дакле, за два чвора графа кажемо да су *повезани* уколико постоји пут који их повезује. У супротном, чворови су *неповезани*. За граф кажемо да је *повезан* уколико су сви чворови тог графа међусобно повезани. У супротном, граф је *неповезан*.

Приметимо да је повезаност чворова једна релација еквиваленције дефинисана на графу. Класе еквиваленције у односу на ту релацију називамо *компоненте повезаности графа*. Следе још неке дефиниције.

*Везивни чвор* графа је чвор чијим се уклањањем број компонената повезаности увећава. *Мост* (или *везивна грана*) графа је грана уклањањем које се број компонената повезаности увећава (за 1). Посебно, везивни чвор и мост повезаног графа су редом чвор и грана чијим уклањањем граф постаје неповезан. Такав чвор и грана не морају да постоје.

*Растојање* између два чвора $u$ и $v$ графа $G$, у ознаци $\mathrm{dist}(u, v)$, једнако је дужини најкраћег пута који их повезује. Сматраћемо да је растојање између два чвора који нису повезани бесконачно.

*Ексцентрицитет чвора* $u$, у ознаци $\mathrm{ecc}(u)$, једнак је растојању између тог чвора и чвора који се налази на максималном растојању од њега, то јест

$$\mathrm{ecc}(u) = \max\{\mathrm{dist}(u, v) \mid v \in V\}.$$

*Радијус графа* $G$, у ознаци $r(G)$, једнак је минималном ексцентрицитету чвора тог графа, то јест

$$r(G) = \min\{\mathrm{ecc}(u) \mid u \in V\}.$$

*Центар графа* чине сви чворови чији је ексцентрицитет једнак радијусу графа.

*Дијаметар графа* $G$, у ознаци $\mathrm{diam}(G)$, једнак је максималном ексцентрицитету у том графу, то јест

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{ecc}(u) \mid u \in V\}.$$

Повезаност, радијус и дијаметар су инваријанте графа.

### 3.1.4 Неки графови

*Празан граф* је граф који нема грана. Такав граф који се састоји само од једног чвора називамо *тривијалан граф*.

*Комплетан* (или *потпун*) *граф* је граф чија су свака два чвора спојена граном. Комплетан граф који има $n$ чворова означавамо са $K_n$.

*Регуларан граф* је граф чији чворови имају једнаке степене. Рецимо, празни и комплетни графови су регуларни. Регуларни графови предмет су многих истраживања. Имају широку примену у теорији кодова, конструкцији комплексних мрежа, електротехници и хемији. На основу Примера 3.1.6, закључујемо да постоје тачно два неизоморфна повезана регуларна графа која имају 4 чвора. Познат је број таквих графова и у случају већег броја чворова. Рецимо, повезаних регуларних графова са 10 чворова има 167, а са 16 чворова 1 698 517 036 411.

*Бипартитан граф* је тривијалан граф или граф чији се скуп чворова може поделити на два дисјунктна подскупа (дакле, у складу са дефиницијом партиције скупа која је дата на страни 102), тако да свака грана тог графа спаја чвор из једног подскупа са чвором из другог подскупа. Приметимо да је сваки празан граф истовремено и бипартитан; будући да нема грана, његови чворови могу се, на произвољан начин, распоредити у два дисјунктна скупа.

*Комплетан бипартитан граф* је бипартитан граф код којег је сваки чвор из једног скупа партиције суседан свим чворовима из другог скупа. Степен сваког чвора из једног скупа једнак је броју чворова другог скупа. Комплетан бипартитан граф означавамо са $K_{n_1,n_2}$, при чему $n_1$ и $n_2$ означавају кардиналности скупова партиције.

*Звезда* је комплетан бипартитан граф за који важи $n_1 = 1$.

*Циклус* је повезан граф код којег је степен сваког чвора једнак 2. Циклус који има $n$ чворова означавамо са $C_n$.

*Пут* је граф дефинисан на следећи начин:

- за $n \leq 2$ то је једини повезан граф са $n$ чворова, а
- за $n \geq 3$ то је граф који се добија уклањањем једне гране циклуса $C_n$.

Пут који има $n$ чворова означавамо са $P_n$.

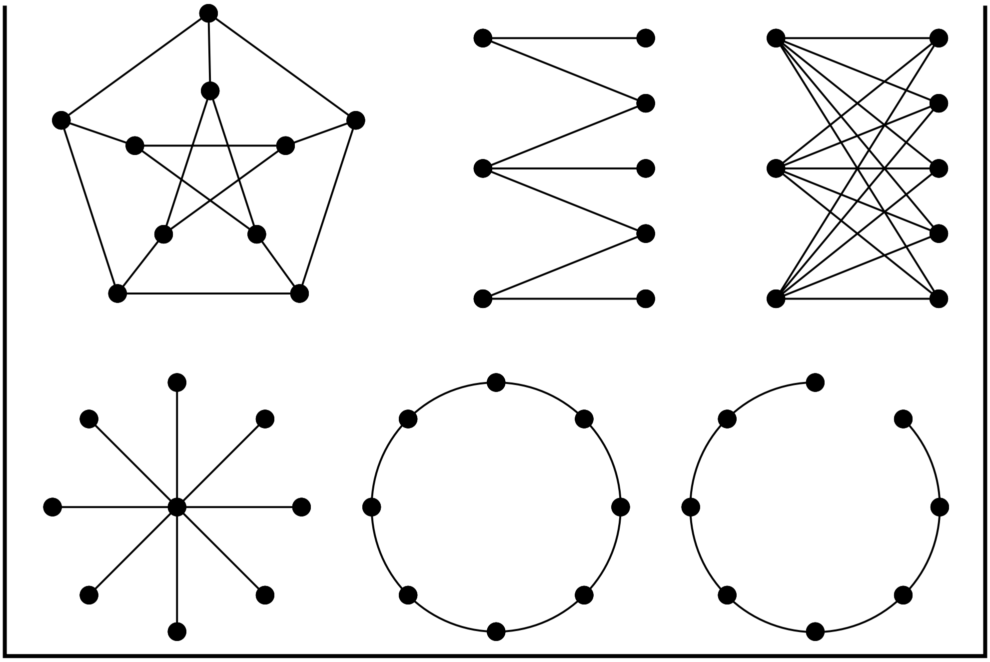
*Дужина циклуса* и *дужина пута* једнаке су броју грана у сваком од њих.

Приметимо да пут у графу (у смислу раније дефиниције пута као специјалног случаја шетње у графу дате на страни 131) одређује индуковани подграф који је пут (у смислу претходне дефиниције).

Јасно је да за $n \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један празан граф, комплетан граф, циклус и пут са $n$ чворова (у случају циклуса, мора важити $n \geq 3$). Слично, за $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један комплетан бипартитан граф $K_{n_1,n_2}$.

**Пример 3.1.9.** На слици се редом налазе један регуларан граф чији су сви чворови степена 3 (овај граф познат је као *Петерсенов*[25] *граф*), пример бипартитног графа, комплетан бипартитан граф $K_{3,5}$, звезда $K_{1,8}$, циклус $C_8$ и пут $P_8$.

[25]Јулијус Петер Кристијан Петерсен (Julius Peter Christian Petersen, 1839–1910) – дански математичар.



Пододељак ћемо закључити једном одредницом бипартитних графова.

**Теорема 3.1.10.** *Граф је бипартитан ако и само ако не садржи циклус непарне дужине (као подграф).*

*Доказ.* Ако би бипартитан граф садржао циклус непарне дужине, онда би свака два суседна чвора тог циклуса припадала различитим скуповима партиције чворова, међутим то није могуће будући да циклус садржи непаран број чворова.

Претпоставимо сада да је граф повезан и да не садржи циклус непарне дужине. Извршићемо разврставање чворова графа у два скупа тако да чворови који припадају истом скупу нису суседни. Најпре произвољан чвор, рецимо $u$, додајемо у први скуп. Затим све чворове који су на непарном растојању од чвора $u$ додајемо у други скуп, а све оне који су на парном растојању у први. Уколико, након завршетка ове процедуре, међу чворовима истог скупа нема суседних, граф је бипартитан.

У супротном, догодиће се да су два чвора, која су или оба на непарном или оба на парном растојању од $u$, суседни. У том случају, комбиновањем најкраћих путева од чвора $u$ до сваког од тих чворова и гране која их спаја, добијамо циклус непарне дужине, што је у супротности са претпоставком.

Ако је граф неповезан, онда претходну процедуру треба применити на сваку од компонената повезаности. ∎

### 3.1.5 Матричне репрезентације графова

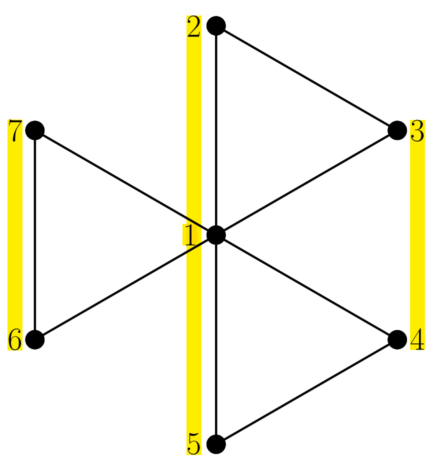
Има више начина записивања графова у рачунарским системима, а скоро сви су засновани на различитим навођењима суседстава између чворова. Један такав запис јесте матрични запис. Нека су надаље $v_1, v_2, \ldots, v_n$ чворови, а $e_1, e_2, \ldots, e_m$ гране, графа $G$.

*Матрица суседства* графа $G$, у ознаци $A(G)$, је матрица формата $n \times n$ у којој је елемент на позицији $(i,j)$ једнак 1 уколико су чворови $v_i$ и $v_j$ суседни, а у супротном 0. Матрица суседства је очигледно симетрична. Приметимо да матрица суседства није инваријанта графа. Ипак, матрице суседства изоморфних графова су сличне (што није тешко доказати).

*Матрица инциденције* графа $G$, у ознаци $R(G)$, је матрица формата $n \times m$ у којој је елемент на позицији $(i,j)$ једнак 1 уколико је чвор $v_i$ инцидентан са граном $e_j$, а у супротном 0. Свака колона матрице инциденције садржи тачно две јединице.

**Пример 3.1.11.** Матрица суседства графа са слике чија $i$-та врста и колона одговарају чвору нумерисаном са $i$ $(1 \leq i \leq 7)$ и једна матрица инциденције истог графа одређена на сличан начин редом су дате са

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



На почетку пододељка рекли смо да се дефинисане матрице користе за запис графова у рачунарским системима. То је тачно, иако можемо приметити да оне дају више информација него што је потребно. На пример, граф можемо одредити само на основу, рецимо, горњег троугла матрице суседства. Ипак, овакви записи имају и неке предности. Наиме, придружена матрица садржи низ информација о структури и инваријантама графа. Такође, неке трансформације графа могуће је дефинисати операцијама над одговарајућим матрицама. Постоји читава област теорије графова која се назива спектрална теорија и која се бави изучавањем матрица суседства (или неких других квадратних матрица које су придружене графовима) и реалних бројева који су одређени њима. Такви бројеви називају се сопствене вредности и чине мултискуп који се назива *спектар графа*. На спектралној теорији графова се нећемо задржавати, а више о њој може се пронаћи у [11], а о њеним применама у рачунарству у [10]. (Интересантно је, рецимо, да је интернет претраживач Гугл заснован на резултатима ове теорије.)

## Задаци

**1.** Доказати да не постоји регуларан граф са непарним бројем чворова и непарним степеном чвора.

**2.** Доказати да за сваки повезан граф важи $m \geq n - 1$. Навести пример графа за који се достиже једнакост. Колико грана има комплетан граф $K_n$, а колико комплетан бипартитан граф $K_{n_1 n_2}$?

**3.** На коктелу се налази $n$ брачних парова. Ако се свако од присутних руковао са свима осим са својим супружником, колико је укупно руковања било? Формирати одговарајући граф чији су чворови суседни ако и само ако су се одговарајуће особе руковале. (Овакав граф називамо *коктелски граф*.)

**4.** Навести пример повезаног регуларног графа који има 100 чворова степена 4.

**5.** Доказати да за сваки комплетан бипартитан регуларан граф $K_{n_1,n_2}$ који није празан граф важи једнакост $n_1 = n_2$.

**6.** Доказати да је $k$-димензиона коцка један бипартитан регуларан граф степена $k$ који има $2^k$ чворова и $k2^{k-1}$ грана.

**7.** Доказати да не постоји граф чији су сви чворови различитог степена. Конструисати повезан граф са 8 чворова чији су степени редом 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6 и 7.

**8.** Навести пример повезаног бипартитног графа у којем сви чворови у сваком од скупова партиције имају различит степен. Извести општи закључак.

**9.** Одредити све неизоморфне повезане графове са 5 чворова код којих је минимални степен чвора већи од 1.

**10.** Одредити све неизоморфне повезане регуларне графове са 8 чворова.

**11.** Доказати да је најмање један од графова $G, \overline{G}$ повезан.

**12.** Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један коктелски граф (дефинисан у задатку 3) који има $2n$ чворова.

**13.** Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$, до на изоморфизам, постоји тачно један повезан граф чији су степени чворова редом дати са

$$1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n-2, n-1$$

(упоредити задатак 7).

**14.** Доказати да за свако $k \geq 2$, $k$-димензиона коцка садржи индуковни подграф изоморфан $(k-1)$-димензионој коцки.

**15.** Доказати да број чворова регуларног самокомплементарног графа једнак $4k+1$, за $k \geq 0$. Доказати да је циклус $C_5$, до на изоморфизам, једини такав граф са 5 чворова и одредити све такве графове са 9 чворова.

**16.** Доказати да регуларан граф степена 3 садржи везивни чвор ако и само ако садржи мост.

**17.** Доказати да дијаметар самокомплементарног графа није већи од 3.

**18.** Израчунати ексцентрицитет сваког чвора, радијус и дијаметар Петерсеновог графа и $k$-димензионе коцке.

**19.** Доказати да за сваки граф важи идентитет

$$RR^T = A + D,$$

при чему је $R$ матрица инциденције, $R^T$ њен транспонат, $A$ матрица суседства, а $D$ одговарајућа дијагонална матрица са степенима чворова на главној дијагонали.

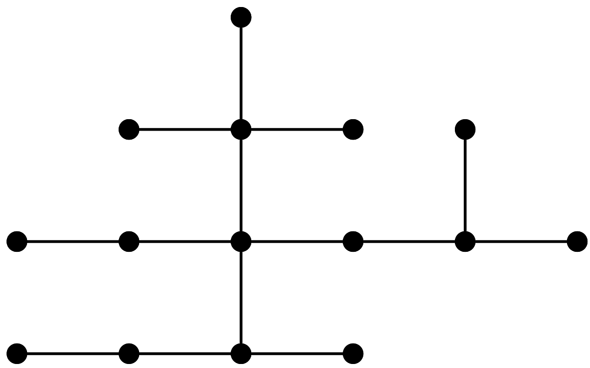
**20.** Доказати да је елемент који се налази на позицији $(i,j)$ у матрици $A^k$ (при чему је $A$ матрица суседства графа) једнак броју шетњи дужине $k$ које полазе из чвора $v_i$, а завршавају у чвору $v_j$ тог графа.

## 3.2 Стабла

У овом одељку упознаћемо се са графовима које називамо стаблима. Посебно ћемо размотрити коренска и разапињућа стабла и навешћемо два алгоритма за претраге графова. Излагање које следи представља теоријску основу за алгоритме које ћемо презентовати у наредна два одељка.

### 3.2.1 Дефиниција и основна својства

*Стабло* је повезан граф који не садржи подграф изоморфан циклусу. Пример једног стабла дат је на Слици 3.3.



Слика 3.3: Пример стабла.

Број неизоморфних стабала са највише 14 чворова дат је у следећој табели:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 6 | 11 | 23 | 47 | 106 | 235 | 551 | 1301 | 3159 |

Неповезан граф чија је свака компонента повезаности стабло називамо *шума*. Следе нека својства стабала.

**Теорема 3.2.1.** *Следећа тврђења су еквивалентна.*

*(1) T је стабло.*

*(2) T је повезан граф код којег је број грана за* 1 *мањи од броја чворова, то јест важи*

$$m = n - 1.$$

*(3) T је максимални граф без циклуса (у смислу да додавањем било које гране настаје циклус).*

*(4) $T$ је минимални повезан граф (у смислу да уклањањем било које гране постаје неповезан).*

*(5) За свака два чвора графа $T$ постоји тачно један пут који их повезује.*

*Доказ.* (1)$\Rightarrow$(2) Претпоставимо да импликација важи за сва стабла са највише $n$ чворова и нека је број чворова стабла $T$ једнак $n+1$. У њему постоје два чвора која се налазе на максималном растојању и ти чворови морају бити степена 1. (У супротном, или нису на максималном растојању или у графу постоји циклус.) Уклањањем било којег од та два чвора добијамо стабло са $n$ чворова и (по претпоставци) $n-1$ грана. Будући да смо уклањањем чвора уклонили и тачно једну грану инцидентну са њим, стабло $T$ има $n$ грана.

(2)$\Rightarrow$(3) Најпре, разматрани граф нема циклуса, иначе бисмо уклањањем гране која припада неком циклусу добили повезан граф са истим бројем чворова, али са једном граном мање, што није могуће будући да граф са тим бројем грана не може бити повезан. (Ово је једноставан индуктивни закључак. Видети и задатак 2 из претходног одељка.) Будући да је $T$ повезан граф, за свака два чвора постоји пут који их повезује. Уколико додамо једну грану, на пример између чворова $u$ и $v$, тада она заједно са путем који их повезује чини циклус.

(3)$\Rightarrow$(4) Ако је $T$ максимални граф без циклуса, онда он мора бити повезан. (У супротном, могли бисмо додати грану између чворова који се налазе у различитим компонентама и на тај начин формирати граф са већим бројем грана који такође нема циклуса.) Ако сада уклонимо једну грану из графа $T$, онда он не може остати повезан јер би у том случају постојао пут који повезује чворове између којих је управо уклоњена грана, па би тај пут и та грана чинили циклус у полазном графу.

(4)$\Rightarrow$(5) Претпоставимо да за нека два чвора постоје два пута која их повезују. У том случају (пошто су ти путеви различити), постоји грана која припада првом од њих, а не припада другом. Уклањањем те гране добијамо граф са мањим бројем грана који је такође повезан (наиме, и даље за свака два чвора постоји пут који их повезује захваљујући постојању два пута између разматраних чворова), што противуречи претпоставци (4).

(5)$\Rightarrow$(1) Граф за који важи претпоставка (5) по дефиницији је повезан. Уколико би такав граф садржао циклус, тада би за свака два чвора која припадају циклусу постојала два пута који их повезују (оба пута се налазе у том циклусу), што није у складу са претпоставком (5). ■

У наставку ћемо размотрити две врсте стабала: коренска и разапињућа.

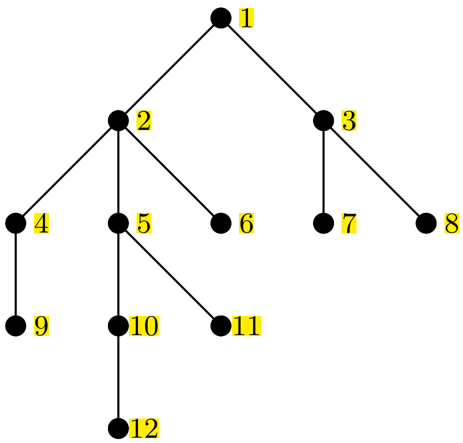
### 3.2.2 Коренска и разапињућа стабла

*Коренско стабло* је стабло чији је један чвор издвојен од осталих. Тај чвор називамо *корен*.

Међу чворовима коренског стабла постоји одређена хијерархија и пратећа терминологија. Нека је $T$ коренско стабло чији је корен чвор $r$. За чвор $u$, за који важи $\mathrm{dist}(u, r) = i$, кажемо да припада $i$-том нивоу стабла $T$. Ако чвор $u$ припада $i$-том нивоу, а чвор $v$ припада $(i+1)$-ом нивоу и ако су та два чвора суседни, онда чвор $u$ називамо *претходником* чвора $v$, а чвор $v$ називамо *наследником* чвора $u$. Чвор који нема наследника називамо *лист*. Чвор који није ни корен ни лист називамо *унутрашњи чвор*.

**Пример 3.2.2.** На слици је илустровано једно коренско стабло са распоредом чворова по нивоима.

| ниво | чворови |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2, 3 |
| 2 | 4, 5, 6, 7, 8 |
| 3 | 9, 10, 11 |
| 4 | 12 |




Јасно, чвор 1 је корен, чворови 6, 7, 8, 9, 11 и 12 су листови, а остали чворови су унутрашњи.

*Коренско $k$-арно стабло* је коренско стабло чији сваки чвор има највише $k$ наследника. *Потпуно коренско $k$-арно стабло* је коренско стабло чији сваки чвор који није лист има тачно $k$ наследника. Са оваквим стаблима већ смо се сусрели у Одељку 2.5. У том тренутку још увек нисмо имали дефиницију графа нити својства стабла дата у Теореми 3.2.1, па смо применили другачији приступ. Тамошња рекурзивна дефиниција потпуног коренског $k$-арног стабла (видети Напомену 2.5.3) еквивалентна је овој.

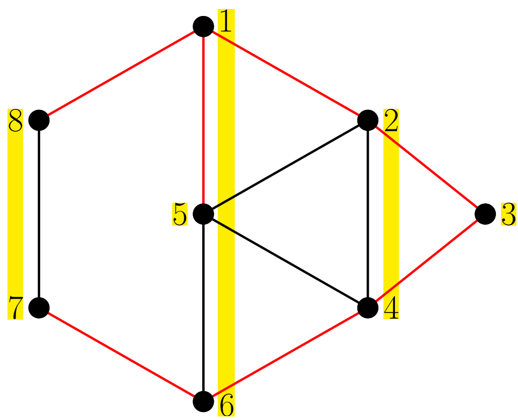
Прелазимо сада на стабла из другог дела наслова пододељка. Најпре ћемо дати општију дефиницију разапињућег графа.

*Разапињући граф* графа $G$ је граф који има исти скуп чворова као $G$ и чији је скуп грана подскуп скупа грана графа $G$. Очигледно је сваки разапињући граф један подграф графа $G$.

У складу са претходном дефиницијом, *разапињуће стабло* повезаног графа је разапињући граф који је стабло. Слично, *разапињућа шума* неповезаног графа је разапињући подграф који се састоји од разапињућих стабала компонената повезаности датог графа. Разапињућа стабла спадају међу подграфове који се највише изучавају, будући да у многим применама подграфови који су повезани и уз то имају минимални број грана играју значајну улогу. Јасно је да сваки повезан граф има разапињуће стабло (које не мора бити јединствено). У наставку ћемо искористити разапињућа стабла за дефиницију елементарних циклуса графа и цикломатичког броја графа.

Ако је $T$ разапињуће стабло повезаног графа $G$, онда се додавањем произвољне гране стаблу $T$, при чему она припада остатку графа $G$, добија тачно један циклус у новонасталом графу. Тај циклус називамо *елементарни циклус* графа $G$ у односу на разапињуће стабло $T$. Исто важи и уколико је $T$ разапињућа шума неповезаног графа.

**Пример 3.2.3.** На слици је илустрован граф и једно његово разапињуће стабло (гране стабла илустроване су црвеном бојом). Додавањем гране 78 стаблу добијамо елементарни циклус који ћемо означити са 1234678.



Није тешко закључити да број елементарних циклуса повезаног графа не зависи од избора разапињућег стабла. Заиста, број грана сваког разапињућег стабла једнак је $n-1$, а по дефиницији свака грана која припада графу, али не и фиксираном разапињућем стаблу, одређује један елементарни циклус. Према томе, у случају повезаног графа број елементарних циклуса једнак је $m-n+1$. Важи и следећи, нешто општији, резултат који се рецимо може доказати индукцијом по броју компонената повезаности.

**Теорема 3.2.4.** *Број елементарних циклуса графа једнак је $m-n+p$, при чему је $m$ број грана, $n$ број чворова, а $p$ број компонената повезаности тог графа.*

*Цикломатички број* графа, у ознаци $\nu$, једнак је броју елементарних циклуса графа. Јасно, цикломатички број је једна инваријанта графа.

**Пример 3.2.5.** Одредити цикломатички број и све елементарне циклусе графа из Примера 3.2.3 у односу на назначено разапињуће стабло.

Применом Теореме 3.2.4, добијамо једнакост $\nu = m-n+p = 12-8+1 = 5$. Уз нотацију из претходног примера, елементарни циклуси су:

- 234, добијен додавањем гране 24,
- 125, добијен додавањем гране 25,
- 12345, добијен додавањем гране 45,
- 123465, добијен додавањем гране 56, и
- (већ споменути) 1234678, добијен додавањем гране 78.

### 3.2.3 Претраге графова

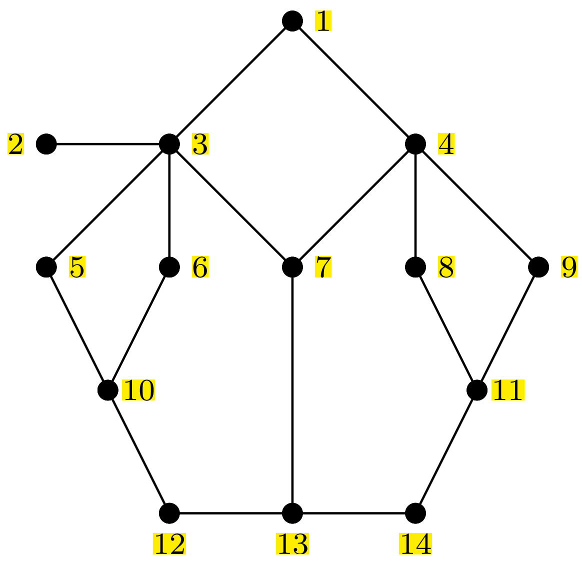
*Претрага графа* састоји се од селектовања једног по једног чвора графа тако да сваки буде селектован тачно једанпут, а у складу са неким правилом којим је одређен редослед селектовања. Уместо термина „селектовање чворова”, у складу распрострањеним приступом, користићемо термин „обилажење чворова”. Проблем претраге графа блиско је повезан са применама, наиме довољно је чворове схватити као репрезентације објеката које из неког разлога треба обићи. У ономе што следи ограничићемо се на повезане графове.

Код (вероватно) свих претрага, наредни чвор у обиласку суседни је неком чвору који је већ обиђен (тај чвор не мора бити последњи обиђени). У таквој ситуацији, граф чији су чворови чворови графа који је предмет претраге, а чије су гране одређене претрагом, је једно разапињуће (усмерено) стабло датог графа. (Ускоро ћемо размотрити два примера након којих ће ово бити јасније.) Такво стабло називамо *стабло претраге*.

Објаснићемо две претраге, такозвану претрагу по дубини и претрагу по ширини графа. Обе претраге полазе од произвољног чвора, а одговарајуће алгоритме укратко ћемо описати.

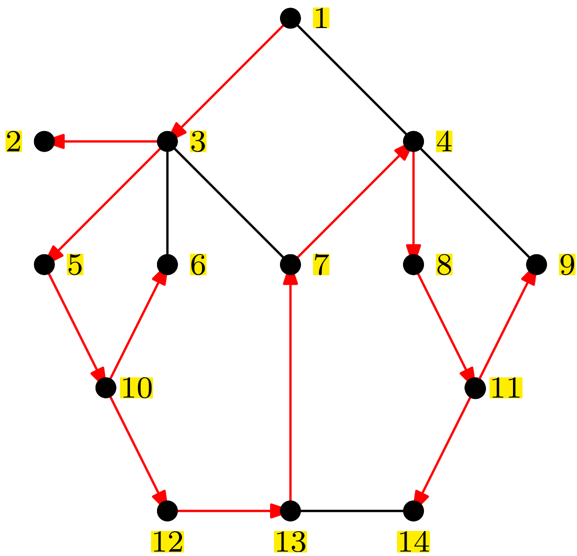
Код *претраге по дубини* (енгл. depth first search, DFS), наредни чвор који обилазимо суседни је оном који је претходно обиђен, уколико је то могуће. Ако није, онда је суседни претходном од претходно обиђеног, и тако редом. Претрага у општем случају није јединствена, то јест пружа могућност избора која се углавном решава иницијалном нумерацијом чворова тако да, у случају више могућности, обилазимо чвор нумерисан најмањим бројем. Једна оваква претрага илустрована је следећим примером.

**Пример 3.2.6.** Извршићемо претрагу по дубини графа са слике. Да би претрага била јединствена, чворове графа нумерисали смо на произвољан начин, а претрагу ћемо започети од чвора нумерисаног са 1.




На следећој слици илустрован је резултат претраге. У складу са овом претрагом, други чвор који обилазимо је сусед чвора 1 који је нумерисан најмањим бројем, дакле 3. Према томе, назначили смо и грану која спаја чворове 1 и 3 и доделили јој усмерење од чвора 1 ка чвору 3. На исти начин, наредни чвор је 2 (до којег смо стигли од чвора 3). Сада, будући да чвор 2 нема ниједног суседа који није обиђен, наредни чвор који обилазимо је сусед чвора који претходи чвору 2 (а то је 3) и уз то је нумерисан најмањим бројем, дакле то је чвор 5, и тако редом. Напослетку, сви чворови обиђени су у следећем редоследу:

$$1, 3, 2, 5, 10, 6, 12, 13, 7, 4, 8, 11, 9, 14.$$

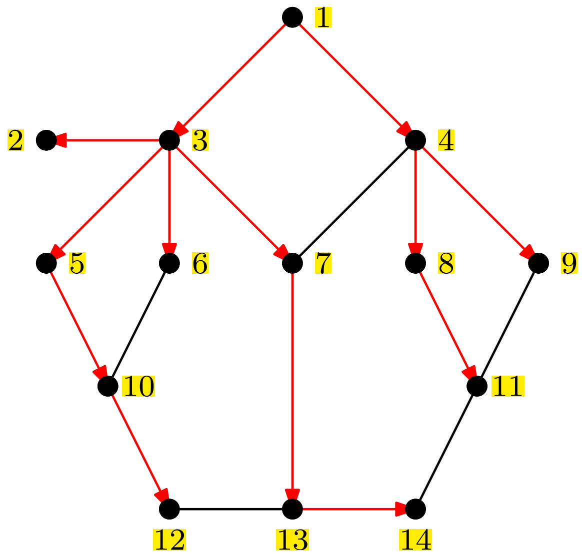



Код *претраге по ширини* (енгл. breadth first search, BFS), најпре обилазимо све суседе првог чвора, потом све (необиђене) суседе другог чвора (дакле, оног који је био други у редоследу обилажења), потом све (необиђене) суседе трећег чвора, и тако редом. Ни ова претрага у општем случају није јединствена што се може решити на већ описани начин.

**Пример 3.2.7.** На слици је илустрована једна претрага по ширини графа из Примера 3.2.6. Користили смо исту нумерацију чворова и поново започели претрагу од чвора нумерисаног са 1. Затим смо обишли све његове суседе, дакле редом чворове 3 и 4, потом необиђене суседе чвора 3, дакле редом чворове 2, 5, 6 и 7, и тако редом. Слично као у претходном примеру, редослед обилажења чворова је:

$$1, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 11, 12, 14.$$

Стабло претраге назначено је на исти начин.




## Задаци

**1.** Одредити сва неизоморфна стабла која имају 7 чворова.

**2.** Доказати да свако стабло садржи најмање два чвора степена 1.

**3.** Ако су $d_1, d_2, \ldots, d_n$ степени чворова неког стабла, доказати да важи једнакост

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1).$$

**4.** Доказати Теорему 3.2.4.

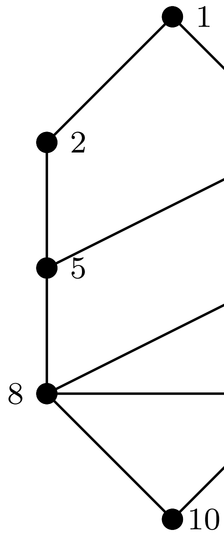
**5.** Доказати да за цикломатички број $\nu$ повезаног графа који има $n$ чворова важе неједнакости

$$0 \leq \nu \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

**6.** Одредити сва неизоморфна разапињућа стабла Петерсеновог графа. Израчунати цикломатички број тог графа?

**7.** Израчунати цикломатички број регуларног графа (који има $n$ чворова) чији је степен чвора једнак $r$.

**8.** Претражити граф са слике обема претрагама (по дубини и по ширини), ако је почетни чвор нумерисан са 1.




**9.** Да ли постоји претрага по дубини графа из претходног задатка која резултује разапињућим стаблом које је изоморфно путу $P_{10}$? Образложити.

## 3.3 Означена стабла

Раније смо рекли да су графови изоморфни уколико се разликују само у означавању чворова. У складу са тим, уколико означавање чворова у нашим разматрањима не игра никакву улогу, тада изоморфни графови практично представљају један исти граф.

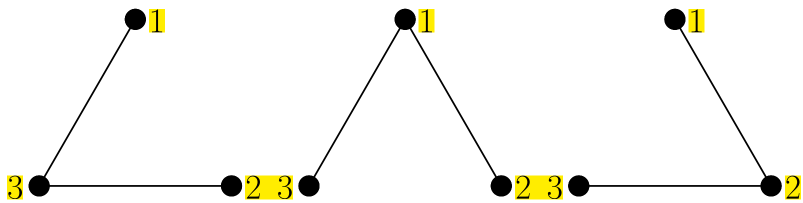
У овом одељку бавићемо се графовима, а највише стаблима, код којих означавање чворова игра есенцијалну улогу. Да бисмо то нагласили, такве графове назваћемо *означени графови*. Напомињемо да изоморфни графови остају изоморфни и уколико их разматрамо као означене, али се такви графови разликују уколико њихови чворови нису означени на исти начин.

У ономе што следи размотрићемо проблем пребројавања означених стабала и навести алгоритме за кодирање и декодирање таквих стабала.

### 3.3.1 Пребројавање означених стабала

Чворове означеног графа означаваћемо природним бројевима. У складу са тим, граф из Примера 3.2.6 и 3.2.7 може бити разматран као означени граф уколико тамошњу нумерацију чворова схватимо као њихово означавање.

**Пример 3.3.1.** Од раније знамо да, до на изоморфизам, постоји тачно једно стабло са 3 чвора. Са друге стране, број означених стабала са 3 чвора једнак је 3. Сва три стабла су изоморфна и илустрована су на слици.




Након краћег пребројавања, што овде нећемо радити, може се закључити да означених стабала са 4 чвора има 16.

У теорији графова не постоји ефективни начин за израчунавање броја неизоморфних графова са датим бројем чворова. Исто важи и за број неизоморфних стабала. У таквим пребројавањима користе се сложеније технике које резултују разним асимптотским оценама на којима се овде нећемо задржавати. Са друге стране, број означених стабала која имају једнак број чворова даје Кејлијева[26] теорема. Први доказ теореме дао је Прифер.[27] Ми ћемо је навести без доказа, а рецимо у књизи [31] дата су четири доказа ове теореме.

**Теорема 3.3.2 (Кејлијева теорема).** *Број означених стабала са $n$ чворова једнак је $n^{n-2}$.*

Није тешко закључити да је број разапињућих стабала означеног комплетног графа $K_n$ једнак броју означених стабала која имају $n$ чворова, то јест једнак је $n^{n-2}$.

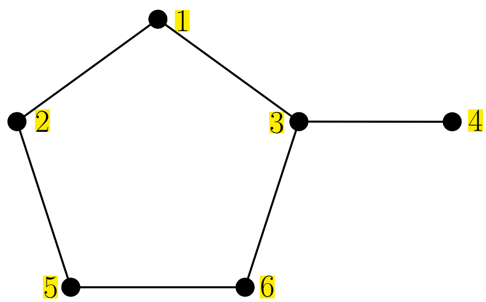
У наставку ћемо дати једну рекурентну формулу за израчунавање броја разапињућих стабала произвољног означеног графа. Пре тога, размотримо још неке означене графове чији број разапињућих стабала можемо израчунати и без коришћења најављене формуле.

[26]Артур Кејли (Arthur Cayley, 1821–1895) – енглески математичар.

[27]Ернст Пол Хајнц Прифер (Ernst Paul Heinz Prüfer, 1896–1934) – немачки математичар.

**Пример 3.3.3.** Повезане графове који, попут графа са слике, садрже тачно један елементарни циклус називамо *уницикличким*.

Постоји тачно 5 разапињућих стабала разматраног означеног графа, будући да јединствени циклус има толико грана. (Уклањањем било које гране циклуса добијамо једно разапињуће стабло.) Нека од тих разапињућих стабала су изоморфна.

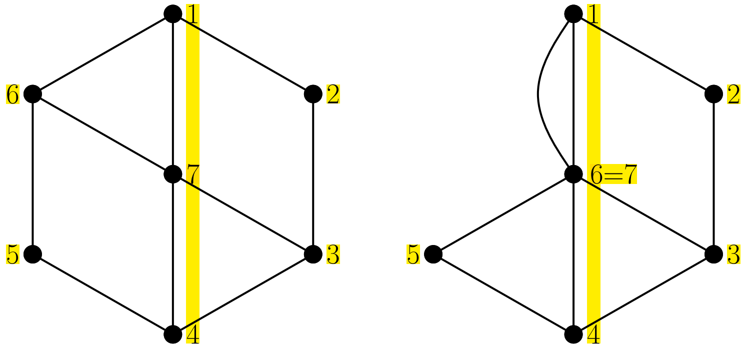



Наравно, важи и општи закључак да је број разапињућих стабала сваког означеног уницикличког графа једнак дужини јединственог циклуса тог графа.

Читалац може покушати да израчуна број разапињућих стабала означеног графа који садржи тачно 2 елементарна циклуса, па потом 3, и тако редом (рачун постаје све компликованији).

Нека је $e$ грана мултиграфа $G$ (који може садржати и петље). *Контракција мултиграфа* $G$ у односу на грану $e$, у ознаци $G \cdot e$, је мултиграф који се добија од мултиграфа $G - e$ идентификовањем чворова са којима је грана $e$ била инцидентна.

**Пример 3.3.4.** На слици је илустрован граф и његова контракција у односу на грану 67.



Означимо надаље број разапињућих стабала означеног графа $G$ са $t(G)$ и напоменимо да се разапињуће стабло повезаног мултиграфа са $n$ чворова дефинише на исти начин као у случају простог графа, то јест то је стабло (а не мултистабло) чији је скуп чворова једнак скупу чворова мултиграфа.

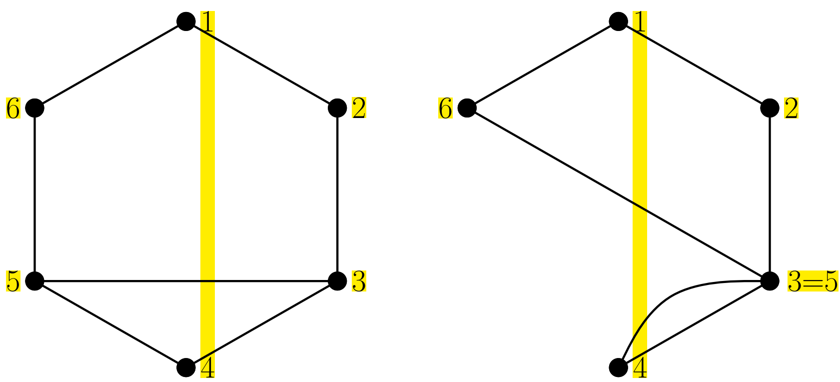
**Теорема 3.3.5.** *За сваки означени мултиграф $G$ важи једнакост*

$$t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e),$$

*при чему се мултиграф $G - e$ добија уклањањем гране $e$, а мултиграф $G \cdot e$ контракцијом мултиграфа $G$ у односу на грану $e$.*

*Доказ.* Свако разапињуће стабло мултиграфа $G$ које не садржи грану $e$ једнозначно одређује разапињуће стабло мултиграфа $G - e$ и обратно, што даје први сабирак са десне стране једнакости из формулације теореме. Слично, свако разапињуће стабло мултиграфа $G$ које садржи грану $e$ једнозначно одређује разапињуће стабло мултиграфа $G \cdot e$ и обратно, што даје други сабирак. ■

**Пример 3.3.6.** Израчунати број разапињућих стабала првог означеног графа са слике.




Означимо разматрани граф са $G$ и нека је $e = 35$ грана у односу на коју ћемо применити теорему. Уклањањем гране $e$ из графа $G$ добијамо циклус $C_6$ који, у складу са закључком из Примера 3.3.3, има 6 разапињућих стабала.

Мултиграф $G \cdot e$ илустрован је на истој слици. Приметимо да се свако разапињуће стабло овог мултиграфа добија уклањањем једне од две дупле гране и још једне од преосталих грана. Према принципу производа, број начина на које можемо добити разапињуће стабло једнак је $2 \cdot 4 = 8$, то јест важи $t(G \cdot e) = 8$.

Коначно, применом Теореме 3.3.5 добијамо резултат

$$t(G) = t(G - e) + t(G \cdot e) = 6 + 8 = 14.$$

### 3.3.2 Кодирање и декодирање означених стабала

Кодирање и декодирање означених стабала користе се приликом записа таквих стабала у рачунарским системима. Као што ћемо видети, свако означено стабло са $n\,(n \geq 2)$ чворова може бити кодирано низом од $n-2$ природна броја.

За $n \geq 2$, *Приферов низ*, у ознаци $s_{(n)} = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-2})$, је било који низ који се састоји од $n-2$ (не нужно различита) броја скупа $\mathbb{N}_n$.

**Теорема 3.3.7.** *Приферов низ $s_{(n)}$ одређује једно означено стабло које има $n$ чворова и обратно.*

Упознаћемо се са два алгоритма – за одређивање Приферовог низа на основу задатог означеног стабла (кодирање) и за одређивање означеног стабла на основу задатог Приферовог низа (декодирање). Ови алгоритми истовремено представљају и доказ претходне теореме.

**Алгоритам 5 (Приферово кодирање).** Алгоритам прихвата нетривијално означено стабло, а враћа јединствени код тог стабла.

**BEGIN**

**INPUT** $T = \{\{1, 2, \ldots, n\}, E\}$ // стабло $T$

$s = ()$ // иницијализација;

**WHILE** $|V(T)| > 2$

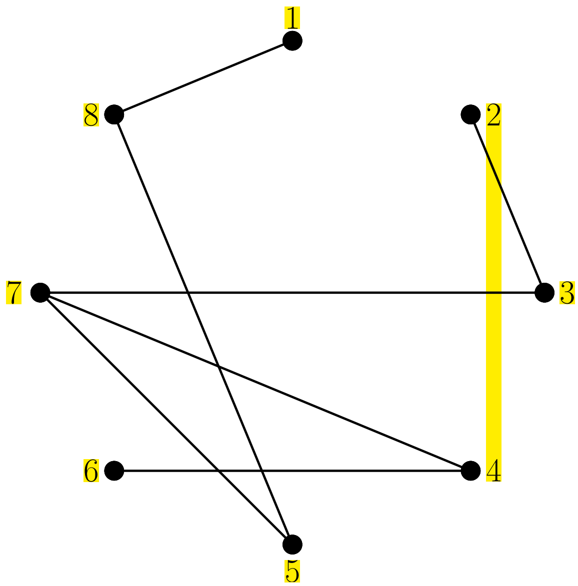
  $u$ – чвор степена 1 минималне ознаке;
  $v$ – сусед од $u$;
  $T := T - u$;
  $s := s + v$ // дописати члан $v$ на крај низа $s$;

**RETURN** $s$

**END**

У складу са алгоритмом, јединствено означено стабло које има 2 чвора кодирно је празним низом. Три означена стабла из Примера 3.3.1 редом су кодирана једночланим низовима (3), (1) и (2). Следи нешто сложенији пример.

**Пример 3.3.8.** Одредити Приферов низ који кодира означено стабло са слике.




Ток алгоритма (са $n$ смо означили број чворова текућег стабла):

- $s = ()$.
- $n = 8$: $s = (8)$.
- $n = 7$: $s = (8, 3)$.
- $n = 6$: $s = (8, 3, 7)$.
- $n = 5$: $s = (8, 3, 7, 4)$.
- $n = 4$: $s = (8, 3, 7, 4, 7)$.
- $n = 3$: $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.

Резултат је низ $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.

Размотримо сада и алгоритам за декодирање у којем користимо и један помоћни низ.

**Алгоритам 6 (Приферово декодирање).** Алгоритам прихвата код, а враћа јединствено означено стабло које је њиме одређено.

**BEGIN**

**INPUT** $s = (s(1), s(2), \ldots, s(n-2))$ // Приферов низ

$T = (\{1, 2, \ldots, n\}, \emptyset)$ // иницијализација;
$l = (1, 2, \ldots, n)$ // помоћни низ;

**WHILE** $s \neq ()$

$v$ – минимална вредност која припада $l$, а не припада $s$;
$w = s(1)$;
$T := T + vw$;
$l := l - v$ // уклонити $v$ из $l$;
$s := s - s(1)$ // уклонити $s(1)$ из $s$, то јест померити низ $s$ за једно место улево;

спојити граном два чвора која су одређена преосталим елементима низа $l$;

**RETURN** $T$

**END**

Следи пример.

**Пример 3.3.9.** Одредити означено стабло које је кодирано Приферовим низом $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.

Ток алгоритма:

- $s = (8, 3, 7, 4, 7, 5)$.
- $T = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \emptyset)$, $l = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.
- $i = 1$: 

| | | |
|---|---|---|
| $v = 1$ | $w = 8$ | $T := T + 18$ |
| $l = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ | | $s = (3, 7, 4, 7, 5)$ |

.

- $i = 2$: 

| | | |
|---|---|---|
| $v = 2$ | $w = 3$ | $T := T + 23$ |
| $l = (3, 4, 5, 6, 7, 8)$ | | $s = (7, 4, 7, 5)$ |

.

- $i = 3$:

| | | |
|---|---|---|
| $v = 3$ | $w = 7$ | $T := T + 37$ |
| $l = (4,5,6,7,8)$ | | $s = (4,7,5)$ |

.

- $i = 4$:

| | | |
|---|---|---|
| $v = 6$ | $w = 4$ | $T := T + 64$ |
| $l = (4,5,7,8)$ | | $s = (7,5)$ |

.

- $i = 5$:

| | | |
|---|---|---|
| $v = 4$ | $w = 7$ | $T := T + 47$ |
| $l = (5,7,8)$ | | $s = (5)$ |

.

- $i = 6$:

| | | |
|---|---|---|
| $v = 7$ | $w = 5$ | $T := T + 75$ |
| $l = (5,8)$ | | $s = ()$ |

.

- $\boxed{T := T + 58}$.

Резултат је стабло из Примера 3.3.8.

Једноставном анализом оба алгоритма може се закључити да први одређује јединствени Приферов низ који одговара задатом означеном стаблу и да, слично, други одређује јединствено означено стабло које одговара задатом низу.

## Задаци

**1.** Одредити сва означена стабла са 5 чворова код којих максимални степен чвора није већи од 3.

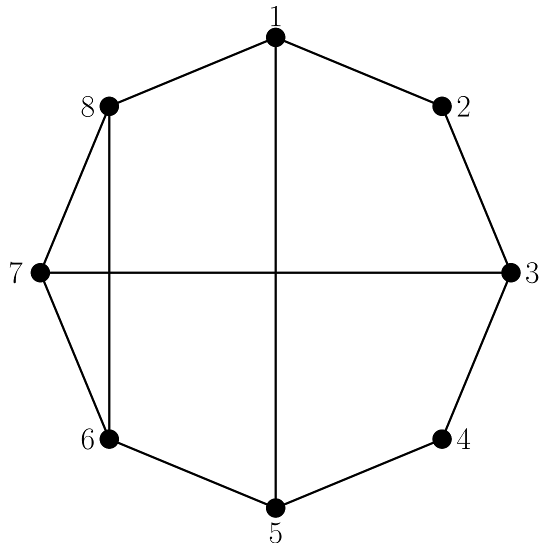
**2.** Користећи Кејлијеву теорему, доказати да је број разапињућих стабала означеног графа који се добија уклањањем једне гране нетривијалног комплетног графа једнак $(n-2)n^{n-3}$.

**3.** Израчунати број разапињућих стабала означеног комплетног бипартитиног графа $K_{n_1,n_2}$.

**4.** Одредити све повезане означене графове који немају више од 10 чворова и чији број разапињућих стабала није већи од 4.

**5.** Израчунати број разапињућих стабала повезаног означеног графа чији је цикломатички број једнак 2. (У складу са дефиницијом цикломатичког броја, овакав граф садржи тачно два елементарна циклуса, али треба имати у виду да исти граф може садржати 2 или 3 подграфа изоморфна неком циклусу. Број разапињућих стабала зависи од броја грана које припадају циклусима.)

**6.** Користећи Теорему 3.3.5, израчунати број разапињућих стабала означеног графа са слике.




**7.** Одредити Приферов код једног разапињућег стабла графа из претходног задатка.

**8.** Ако је чвор максималног степена звезде $K_{1,n-1}$ означен са 1, одредити одговарајући Приферов код (без формалног спровођења алгоритма за кодирање). Које стабло је кодирано низом (2, 3, 4, 5, 6, 7)?

**9.** Декодирати Приферове низове $(2,1,3,3,4,8)$, $(5,9,4,6,6,1,4,5)$ и $(7,6,5,2,7,6,5,1)$.

## 3.4 Минимална разапињућа стабла

У овом одељку разматраћемо само тежинске графове. Подсетимо, то су графови чијим су гранама придружене нумеричке вредности које називамо тежинама грана. Нека су надаље тежине свих грана позитивне. У општем случају, повезан (тежински) граф може имати више разапињућих стабала, а од посебног интереса су она код којих је тежина свих грана стабла минимална, а разлог за то опет лежи у применама. Довољно је тежине грана схватити као цене које треба платити (или дужине путева које треба прећи) крећући се од једног до другог чвора.

Тежину гране $e$ означавамо са $w(e)$. *Тежина* тежинског графа $G$, у ознаци $w(G)$, једнака је суми тежина грана тог графа:

$$w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e).$$

*Минимално разапињуће стабло* повезаног тежинског графа је разапињуће стабло минималне тежине (у скупу свих разапињућих стабала). Наравно, такво стабло постоји у случају сваког повезаног тежинског графа и не мора бити јединствено. Следе два алгоритма за одређивање минималног разапињућег стабла.

### 3.4.1 Краскалов алгоритам

Стратегија Краскаловог[28] алгоритма може се описати са „најпре грана најмање тежине”. Као такав, алгоритам се често наводи као пример похлепног алгоритма. Такви алгоритми увек бирају решење које је локално најповољније.

**Алгоритам 7 (Краскалов алгоритам).** Алгоритам прихвата повезан тежински граф $G$, а враћа једно минимално разапињуће стабло тог графа.

K1: Текући граф $T$ је празан граф са истим скупом чворова као $G$.

K2: Уредити гране графа $G$ у неопадајући низ у складу са њиховим тежинама.

K3: Нека је $e$ наредна грана низа (у првом проласку овим кораком то је прва грана низа). Ако таква грана не постоји, прећи на K5.

K4: Ако додавањем гране $e$ текућем графу $T$ настаје циклус, онда прећи на K3. Иначе, додати ту грану графу $T$ и прећи на K3.

K5: Крај.

Постоје посебни алгоритми којима се одређује да ли додавањем гране у кораку K4 настаје циклус или не. На њима се овде нећемо задржавати. Докажимо коректност Краскаловог алгоритма.

**Теорема 3.4.1.** *Краскалов алгоритам резултује минималним разапињућим стаблом повезаног тежинског графа.*

*Доказ.* Најпре, алгоритам не може резултовати неповезаним графом, нити графом који садржи циклус (видети корак K4), што значи да такав граф мора бити стабло.

Нека је надаље $T$ стабло добијено Краскаловим алгоритмом и нека су $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ гране тог стабла уређене у складу са редоследом додавања текућем графу. Претпоставимо супротно, то јест да тежина ста-

[28] Џозеф Бернард Краскал (Joseph Bernard Kruskal, 1928–2010) – амерички математичар и информатичар.

бла $T$ није минимална. У том случају, постоје разапињућа стабла (најмање једно) минималне тежине која је мања од тежине стабла $T$. Нека је за свако такво стабло $S$ дефинисана функција $f(S) = \min\{i \mid e_i \notin E(S)\}$.

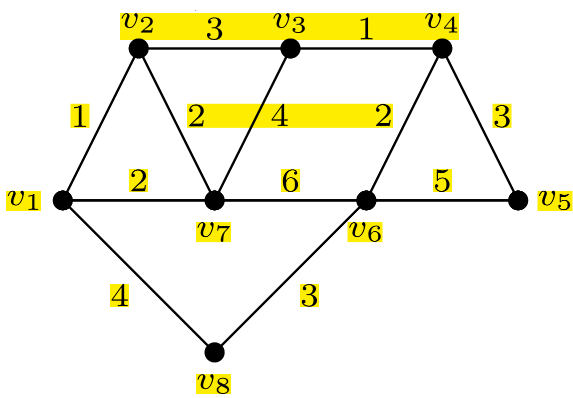
Означимо са $S'$ стабло за које је вредност ове функције макисмална. Ако важи $f(S') = k$, онда су гране $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ истовремено и гране стабла $S'$. У складу са Теоремом 3.2.1 (део (1)⇒(3)), граф који се добија додавањем гране $e_k$ стаблу $S'$ (дакле, $S' + e_k$) садржи циклус. Ако је $e_k'$ грана тог циклуса која припада стаблу $S'$, а не припада $T$ (таква грана постоји јер се стабла $T$ и $S'$ разликују), размотримо граф $S''$ који се добија уклањањем гране $e_k'$ из $S'$ и потом додавањем гране $e_k$. Број грана графа $S''$ такође је једнак $n-1$, а граф је уз то и повезан (јер је грана $e_k'$ припадала циклусу), дакле и он је (разапињуће) стабло.

Јасно је да важи једнакост

$$w(S'') = w(S') + w(e_k) - w(e_k'). \tag{3.1}$$

Приметимо сада да стабла $T$ и $S''$ садрже гране $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Пошто је грана $e_k$ следећа која је у складу са алгоритмом додата стаблу $T$, мора важити $w(e_k) \le w(e_k')$, што заједно са једнакошћу (3.1) даје неједнакост $w(S'') \le w(S')$. Заправо важи једнакост, јер је $S'$ стабло минималне тежине. Међутим, важи и неједнакост $f(S'') > k = f(S')$, што противуречи избору стабла $S'$. ■

**Пример 3.4.2.** Краскаловим алгоритмом одредити минимално разапињуће стабло графа са слике.




Ток алгоритма:

К1: $T$ је празан граф са 8 чворова $v_1, v_2, \ldots, v_8$.

К2: Низ грана дат је следећом табелом:

$$\frac{\begin{array}{cccccc} v_1v_2 & v_3v_4 & v_1v_7 & v_2v_7 & v_4v_6 & v_2v_3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}}{\begin{array}{cccccc} v_4v_5 & v_6v_8 & v_1v_8 & v_3v_7 & v_5v_6 & v_6v_7 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{array}}.$$

К3: $e = v_1v_2$. К4: Не настаје циклус. Дакле, грану $e$ додајемо текућем графу $T$ (сажетије, $e \to T$).

К3: $e = v_3v_4$. К4: $e \to T$.

К3: $e = v_1v_7$. К4: $e \to T$.

К3: $e = v_2v_7$. К4: Настаје циклус. Дакле, грану $e$ не додајемо текућем графу $T$ (сажетије, $e \not\to T$).

К3: $e = v_4v_6$. К4: $e \to T$.

К3: $e = v_2v_3$. К4: $e \to T$.

К3: $e = v_4v_5$. К4: $e \to T$.

К3: $e = v_6v_8$. К4: $e \to T$.

К3: $e = v_1v_8$. К4: $e \not\to T$.

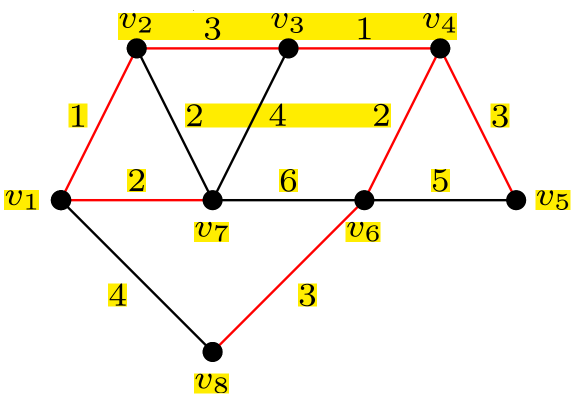
К3: $e = v_3v_7$. К4: $e \not\to T$.

К3: $e = v_5v_6$. К4: $e \not\to T$.

К3: $e = v_6v_7$. К4: $e \not\to T$.

К5: Крај.

Гране резултујућег стабла илустроване су црвеном бојом.



Приметимо да смо у претходном примеру алгоритам применили дословце, то јест испитали смо све гране графа $G$. Будући да разапињуће стабло графа са 8 чворова (толико их има $G$) има 7 грана, алгоритам смо могли завршити оног тренутка када је седма грана додата стаблу (све после ње су одбачене). Дакле, могућа је модификација алгоритма увођењем бројача који би бројао додате гране.

### 3.4.2 Примов алгоритам

Основу за нешто ефикаснији алгоритам чини наредна теорема.

**Теорема 3.4.3.** *Нека је $G = (V, E)$ повезан тежински граф, $U \subset V$ и $e$ грана минималне тежине која спаја чвор из скупа $U$ са чвором из скупа $V \backslash U$. Тада постоји минимално разапињуће стабло тежинског графа $G$ које садржи грану $e$.*

*Доказ.* Нека је $S$ минимално разапињуће стабло које не садржи грану $e$. Подграф $S + e$ садржи циклус. Поред гране $e$, том циклусу припада и нека грана $e'$ која спаја чвор из скупа $U$ са чвором из скупа $V \backslash U$. Пошто важи $w(e) \leq w(e')$, уклањањем гране $e'$ из графа $S + e$ добијамо (тражено) минимално разапињуће стабло. ■

Стратегија Примовог[29] алгоритма може се описати са „најпре најближи сусед”. Овај алгоритам може се користити и за одређивање минималне разапињуће шуме неповезаног тежинског графа (која се аналогно дефинише). У ту сврху се и Краскалов алгоритам може модификовати. У случају повезаног графа, процедура описана у првој реченици корака К2 Примовог алгоритма извршава се само једанпут.

**Алгоритам 8 (Примов алгоритам).** Алгоритам прихвата тежински граф $G$, а враћа једну минималну разапињућу шуму тог графа.

К1: Текући граф $T$ је граф без чворова.

К2: Произвољан чвор графа $G$ који не припада текућем графу додати текућем графу. Ако такав чвор не постоји, прећи на К4.

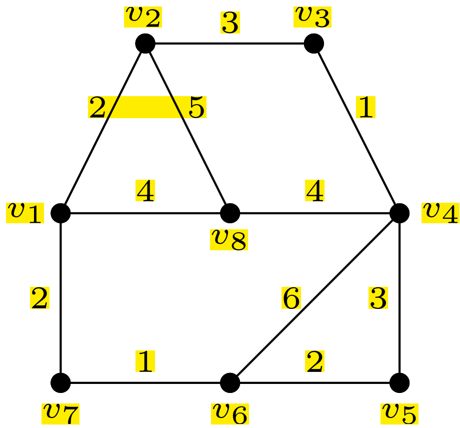
К3: Грану најмање тежине која спаја текући граф $T$ са остатком графа $G$ додати графу $T$ (тиме се и други чвор инцидентан са том граном такође додаје истом графу). Понављати К3 докле год је могуће и потом прећи на К2.

К4: Крај.

---

[29] Роберт Клеј Прим (Robert Clay Prim, 1921) – амерички математичар и информатичар.

**Пример 3.4.4.** Примовим алгоритмом одредити минимално разапињуће стабло графа са слике.




Ток алгоритма:

К1: $T = (\emptyset, \emptyset)$.

К2: Чвор $v_1$ додајемо текућем графу $T$.

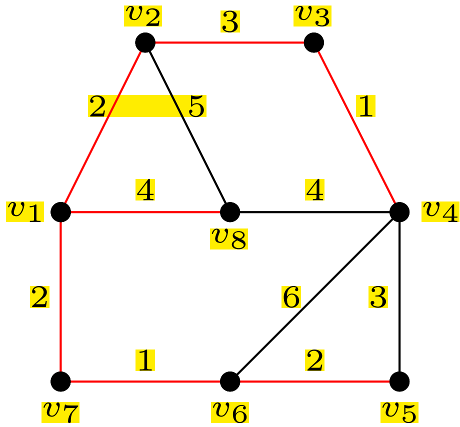
К3: Грану $v_1v_2$ додајемо текућем графу $T$ (сажетије, $v_1v_2 \to T$).

К3: $v_1v_7 \to T$. К3: $v_7v_6 \to T$. К3: $v_6v_5 \to T$.

К3: $v_2v_3 \to T$. К3: $v_3v_4 \to T$. К3: $v_1v_8 \to T$.

К4: Крај.

Гране резултујућег стабла илустроване су црвеном бојом.



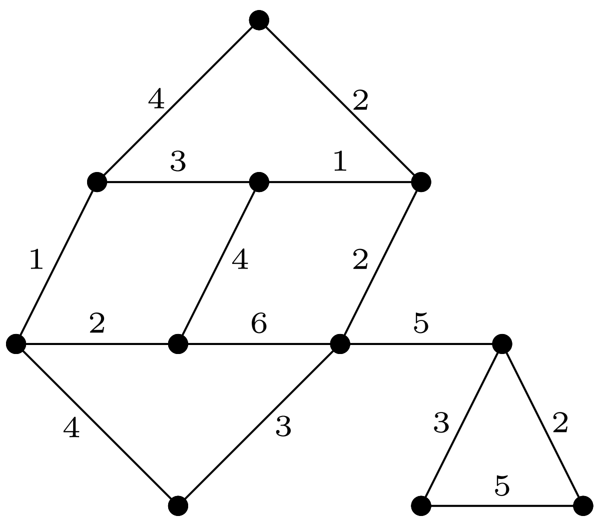
## Задаци

**1.** Доказати да повезан тежински граф код којег су тежине грана међусобно различите садржи јединствено минимално разапињуће стабло.

**2.** Након Примера 3.4.2 констатовали смо да Краскалов алгоритам можемо модификовати тако да завршава рад након формирања разапињућег стабла (без обзира што постоје гране које нису испитане). Доказати примером да и такав алгоритам може дати резултат тек након испитивања свих грана. Извести општи закључак.

**3.** Модификовати Краскалов и Примов алгоритам тако да одређују и тежину добијеног стабла. Унапредити оба алгоритма у случају да је разматрани граф прост (тежина сваке гране једнака је 1), то јест елиминисати непотребне процедуре.

**4.** Краскаловим, а потом и Примовим, алгоритмом одредити минимално разапињуће стабло графа са слике. (Најпре на неки начин означити чворове.)




**5.** Имплементирати Краскалов и Примов алгоритам у неком програмском језику.

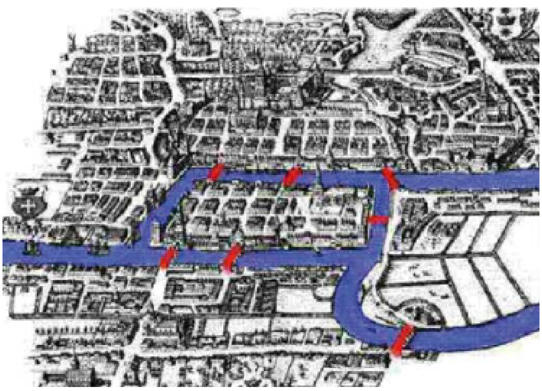
**6.** Модификовати Примов алгоритам тако да резултујуће разапињуће стабло (или општије, шума) буде минимално у скупу свих разапињућих стабала која садрже унапред изабрану грану.

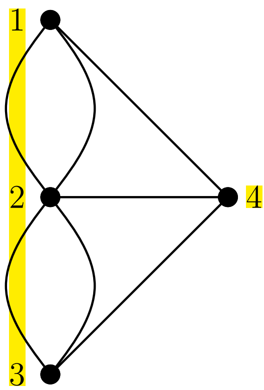
## 3.5 Ојлерови мултиграфови

За мултиграф кажемо да је *Ојлеров* уколико садржи затворену стазу која сваком граном тог мултиграфа пролази једанпут. Такву стазу називамо *Ојлерова стаза*. Слично, за мултиграф кажемо да је *полуојлеров*, уколико садржи стазу која сваком граном пролази једанпут. Јасно, сваки Ојлеров мултиграф истовремено је и полуојлеров.

Неки од проблема у којима можемо сусрести Ојлерове и полуојлерове графове су повезивање ДНК фрагмената, такозвани колам дизајн и проблем кинеског поштара. Прва два проблема нећемо описивати (за детаље видети [21]), а проблем кинеског поштара изложићемо у Пододељку 3.5.1.

Године 1741. објављен је Ојлеров научни рад [14] о 7 кенингсбершких мостова који је, према неким изворима, први рад из теорије графова. Наиме, град који се некада звао Кенингсберг (а данас Калињинград, Русија) лежи на обалама реке Прегел, а у време када је Ојлер живео у том граду, постојало је 7 мостова распоређених као на Слици 3.4. Проблем којим се математичар бавио гласи: да ли је могуће прећи преко свих 7 мостова тако да се преко сваког моста пређе тачно једанпут? Овај проблем познат је као *проблем кенингсбершких мостова*. Ојлер је проблем решио тако што је конструисао припадни мултиграф чији чворови одговарају обалама реке и двама речним острвима, а гране мостовима. Два чвора мултиграфа спојена су са онолико грана колико мостова спаја одговарајуће делове града. Тај мултиграф илустрован је такође на Слици 3.4.






Слика 3.4: Мапа града Кенингсберга из прве половине XVIII века (преузето са интернета) и припадни мултиграф.

На овај начин проблем се своди на испитивање да ли је припадни мултиграф полуојлеров. Није тешко утврдити да он то није, те да тиме прелазак преко мостова на описани начин није могућ.

***Напомена 3.5.1.*** Од Ојлеровог времена па до данас број мостова преко реке Прегел се мењао. На пример, два су срушена током Другог светског рата. Много више детаља, као и податак да је у данашњем Калињинграду могуће прећи преко сваког моста тачно једанпут, може се пронаћи у [25].

Ојлер је дао и решење у општем случају. Главни резултат формулисан је у наредној теореми, док проблему кенингсбершких мостова одговара последица која је дата у наставку.

**Теорема 3.5.2 (Ојлерова теорема).** *За нетривијалан повезан мултиграф важи да је Ојлеров ако и само ако су сви чворови тог мултиграфа парног степена.*

*Доказ.* Означимо мултиграф из формулације теореме са $G$ и претпоставимо најпре да $G$ садржи Ојлерову (затворену) стазу. Уколико се крећемо дуж такве стазе, тада када год неком граном дођемо до неког чвора, морамо користити неку другу грану (коју још нисмо користили) да одемо од тог чвора. Пошто оваква стаза пролази свим гранама уз завршетак у полазном чвору, закључујемо да су степени свих чворова парни.

Претпоставимо сада да је степен сваког чвора мултиграфа $G$ паран. Доказ ћемо извести методом математичке индукције по броју грана. Минимални број грана нетривијалног мултиграфа код којег је степен сваког чвора паран је 2. Такав мултиграф има 2 чвора и 2 гране које их спајају и за њега тврђење очигледно важи.

Претпоставимо да тврђење важи за све мултиграфове који имају мање од $m$ грана и да $G$ има $m$ грана. Будући да су сви чворови парног степена, $G$ не садржи ниједан чвор степена 1, па према томе $G$ није стабло (што није тешко закључити, а читалац се може сетити и задатка 2 из Одељка 3.2). У том случају, $G$ садржи циклус, рецимо $C$. (У случају мултиграфова циклус може имати и 2 чвора; такав је на пример циклус из индуктивне базе.) Ако уклонимо све гране које припадају циклусу $C$, добићемо мултиграф који не мора бити повезан, али који и даље не садржи чворове непарног степена.

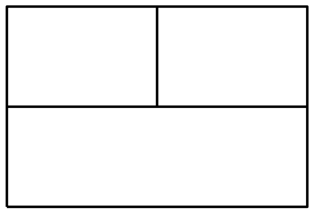
Претпоставимо да новонастали мултиграф има $k$ компонената повезаности и означимо их са $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Свака од компонената повезаности $G_i$, у складу са индуктивном хипотезом, садржи Ојлерову стазу, рецимо $s_i$.

Пошто је мултиграф $G$ повезан, свака од стаза $s_1, s_2, \ldots, s_k$ има барем један заједнички чвор са циклусом $C$. Тражену Ојлерову стазу добијамо тако што крећући се дуж циклуса $C$ када дођемо до првог чвора, рецимо $u$, који припада затвореној стази $s_i$ коју нисмо обишли, изађемо из циклуса, обиђемо целу стазу $s_i$ и вратимо се у чвор $u$. Кретање завршавамо када дођемо до чвора циклуса $C$ од којег смо кренули. ∎

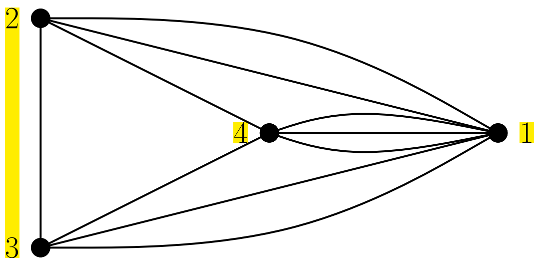
**Теорема 3.5.3.** *Нетривијлан повезан мултиграф је полуојлеров ако и само ако садржи* 0 *или* 2 *чвора непарног степена.*

*Доказ.* Резултат следи директно на основу дефиниције полуојлеровог мултиграфа и Ојлерове теореме. ■

**Пример 3.5.4.** Да ли је могуће повући непрекидну (кривудаву) линију која сваки сегмент линија са доње слике пресеца тачно једанпут?



Ово је типичан задатак са којим се можемо сусрести у домену Ојлерових мултиграфова. Ако спољашњост великог правоугаоника означимо са 1, а три унутрашње области редом са 2, 3 и 4, можемо приметити да када год линија пресеца неки сегмент она прелази из једне од тих области у другу. То нас доводи до мултиграфа са 4 чвора који одговарају споменутим областима и 10 грана које су одређене сегментима линија који раздвајају области:




Пошто овај мултиграф има два чвора непарног степена, у складу са Теоремом 3.5.3, могуће је повући тражену кривудаву линију. Приметимо да она мора кренути из области која одговара једном чвору непарног степена и завршити у области која одговара другом таквом чвору. Такође, на основу Ојлерове теореме, закључујемо да није могуће повући затворену линију која сваки сегмент пресеца тачно једанпут.

У случају Ојлерових мултиграфова са мањим бројем чворова, Ојлерова стаза може се одредити једноставним резоновањем. У општем случају постоје разни алгоритми који одређују такву стазу, а овде ћемо изложити такозвани Флеријев[30] алгоритам.

**Алгоритам 9 (Флеријев алгоритам).** Алгоритам прихвата Ојлеров мултиграф, а враћа једну Ојлерову стазу тог мултиграфа.

**BEGIN**

**INPUT** $G$ // Ојлеров мултиграф;

$v_0$ − произвољан чвор;
$s = (v_0)$ // иницијализација стазе;
$H = G$ // помоћни мултиграф;

**WHILE** $|E(H)| > 0$

  изабрати грану $e = uv \in E(H)$ такву да:
  (1) $u$ је последњи чвор стазе $s$ и
  (2) $e$ није мост мултиграфа $H$, осим ако нема другог избора.

  $s := s + e, v$ // стази додајемо грану $e$ и чвор $v$;
  $H := H - e$;

**RETURN** $s$

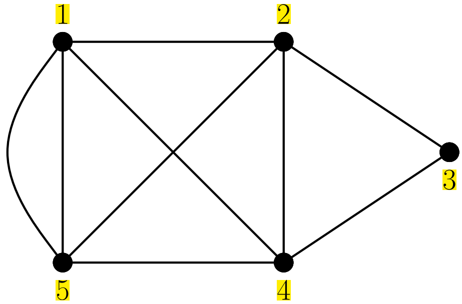
**END**

Доказ коректности Флеријевог алгоритма може се пронаћи у [6]. Следи једна демонстрација.

**Пример 3.5.5.** На слици је илустрован један Ојлеров мултиграф (сви чворови су парног степена).

Применом Флеријевог алгоритма (детаље ћемо прескочити) одређујемо Ојлерову стазу. Једно решење је стаза (1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5, 1). (У складу са Напоменом 3.1.7, користили смо нотацију која не укључује навођење грана стазе.) Приметимо да смо у више наврата бирали грану која је мост у помоћном мултиграфу, јер није било другачијег избора.

[30] Флери (Fleury) – француски математичар из XIX века.




Ево још једног примера.

**Пример 3.5.6.** Уклањањем једне од грана које спајају чворове 1 и 5 мултиграфа из Примера 3.5.5, добијамо граф који садржи тачно два чвора непарног степена. У том случају, могуће је применити модификацију Флеријевог алгоритма којом се одређује (отворена) стаза која сваком граном пролази тачно једанпут и чији су крајњи чворови управо та два. Једна таква стаза је (1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5).

У случају да мултиграф није ни полуојлеров, најпре се зависно од спецификације проблема разматра могућност додавања нових грана како би новонастали мултиграф добио тражено својство. Постоје и модификације Флеријевог алгоритма које допуштају вишеструке проласке истом граном.

### 3.5.1 Проблем кинеског поштара

*Проблем кинеског поштара* можемо описати на следећи начин. Поштар креће из поште, обилази улице у свом рејону разносећи пошиљке и потом се враћа у пошту. Поштар треба да обиђе све улице свог рејона, а време ће трошити најрационалније уколико је дужина пређеног пута минимална.

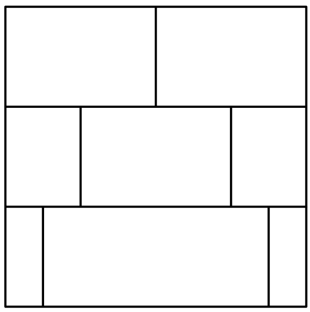
Ако претпоставимо да се на крајевима сваке улице налазе раскрснице, онда рејону можемо придружити један тежински мултиграф чији чворови одговарају раскрсницама, а гране деловима улица између раскрсница. Тежина сваке гране једнака је наравно дужини одговарајућег дела улице. У складу са тим, математичка формулација проблема кинеског поштара гласи: одредити затворену шетњу у тежинском мултиграфу (за који можемо претпоставити да је повезан) која садржи све гране мултиграфа и минималне је тежине. Јасно, сваким проласком неком граном тежина шетње увећава се за тежину те гране. Постоје разни алгоритми за решавање овог проблема. Приметимо да је, у случају да је придружени мултиграф Ојлеров, решење проблема било која Ојлерова стаза у мултиграфу (која се, рецимо, може одредити Флеријевим алгоритмом), будући да у таквој ситуацији поштар може проћи сваком улицом тачно једанпут.

Назив овог проблема потиче од кинеског математичара Куана[31] који га је први разматрао 1962. године.

## Задаци

**1.** Под којим условима је комплемент Ојлеровог графа Ојлеров?

**2.** Да ли је могуће повући непрекидну (кривудаву) линију која сваки сегмент линија са слике пресеца тачно једанпут? Образложити.



**3.** Да ли се фигура из Примера 3.5.4 и фигура из претходног задатка могу нацртати из једног потеза? Образложити.

**4.** Комплемент Петерсеновог графа је регуларан граф степена 6 па је, на основу Ојлерове теореме, тај граф Ојлеров. Применом Флеријевог алгоритма одредити Ојлерову стазу тог графа.

**5.** Имплементирати Флеријев алгоритам у неком програмском језику.

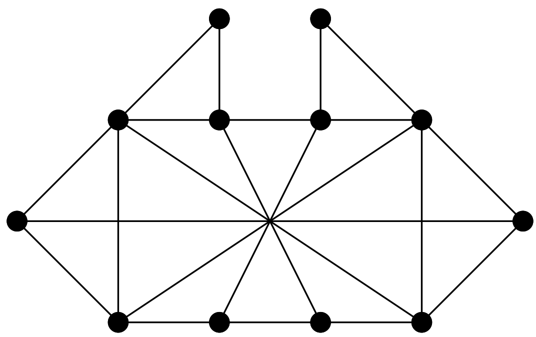
## 3.6 Хамилтонови графови

За граф кажемо да је *Хамилтонов*[32] уколико садржи циклус који пролази сваким чвором тог графа. Такав циклус називамо *Хамилтонов циклус*. Слично, за граф кажемо да је *полухамилтонов* уколико садржи пут који пролази сваким чвором тог графа, а такав пут називамо *Хамилтонов пут*. Сваки Хамилтонов граф истовремено је и полухамилтонов.

[31] Меи-Ку Куан (1934) – кинески математичар.

[32] Вилијем Роуен Хамилтон (William Rowan Hamilton, 1805–1865) – ирски математичар и физичар.

**Пример 3.6.1.** Граф са слике је Хамилтонов (илустрован је тако да није тешко уочити постојање Хамилтоновог циклуса). Читалац може покушати да докаже да Петерсенов граф није Хамилтонов, али да јесте полухамилтонов.



Постоји очигледна аналогија између дефиниције Хамилтоновог графа и дефиниције Ојлеровог (мулти)графа. Питање да ли је неки граф Ојлеров у потпунсти разрешава Ојлерова теорема. У случају Хамилтонових графова не постоји слично „ако и само ако” тврђење. У наставку ћемо доказати неколико тврђења која дају довољне услове за хамилтоновост графа.

**Теорема 3.6.2.** *Уколико граф $G$ садржи два несуседна чвора, $u$ и $v$, таква да њихови степени задовољавају неједнакост*

$$d_u + d_v \geq n,$$

*онда важи да је граф $G$ Хамилтонов ако и само ако је граф $G+uv$ Хамилтонов.*

*Доказ.* Најпре, ако је граф $G$ Хамилтонов, онда је и $G + uv$ такође Хамилтонов независно од претпоставке теореме.

Претпоставимо да је $G + uv$ Хамилтонов граф, а да $G$ то није. У том случају, сваки Хамилтонов циклус првог графа мора пролазити граном $uv$. Другим речима, $G$ садржи Хамилтонов пут који спаја чворове $u$ и $v$. Нека је тај пут одређен низом чворова

$$u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v.$$

Приметимо да ако је чвор $v_i$ суседни чвору $v$, онда чвор $v_{i+1}$ није суседни чвору $u$. У супротном, постојао би Хамилтонов циклус одређен низом чворова

$$u, v_2, \ldots, v_i, v, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}.$$

Дакле, уколико чвор $v$ има $d_v$ суседа, исто толико чворова не могу бити суседи чвора $u$, то јест важи неједнакост

$$d_u \leq n - 1 - d_v,$$

што противуречи претпоставци теореме. ■

Претходну теорему искористићемо за доказ наредне, Хваталове[33] теореме.

**Теорема 3.6.3 (Хваталова теорема).** *Претпоставимо да су чворови $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $n \geq 3$, графа $G$ уређени према степенима, то јест да важи $d_{v_1} \leq d_{v_2} \leq \ldots \leq d_{v_n}$. Ако важи импликација*

$$d_{v_k} \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{v_{n-k}} \geq n - k$$

*онда је $G$ Хамилтонов граф.*

*Доказ.* Претпоставимо да граф $G$ није Хамилтонов, али да је максимални у том смислу, то јест да додавањем било које гране постаје Хамилтонов. Нека је $(v_k, v_l)$ уређени пар несуседних чворова (за који рецимо важи $k < l$) за које је вредност $k + l$ максимална.

Пошто је ова вредност максимална, закључујемо да је чвор $v_k$ суседни свим чворовима $v_{l+1}, v_{l+2}, \ldots, v_n$, односно да важи

$$d_{v_k} \geq n - l. \tag{3.2}$$

Слично, чвор $v_l$ је суседни чворовима $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_n$, односно важи и

$$d_{v_l} \geq n - k - 1. \tag{3.3}$$

На основу претходне теореме, имамо и неједнакост

$$d_{v_k} + d_{v_l} \leq n - 1, \tag{3.4}$$

која, заједно са неједнакошћу (3.3), даје

$$d_{v_k} \leq n - 1 - d_{v_l} \leq (n-1) - (n-k-1) = k.$$

Означимо степен чвора $v_k$ са $t$, то јест $d_{v_k} = t$. Претходна неједнакост даје $t \leq k$, па стога важи и $d_{v_t} \leq t$. Из неједнакости (3.4) следи $t = d_{v_k} < \frac{n}{2}$. Користећи претпоставку теореме и поново неједнакост (3.4), добијамо следећи низ импликација:

$$d_{v_{n-t}} \geq n - t = n - d_{v_k} \geq d_{v_l} + 1 > d_{v_l} \Rightarrow n - d_{v_k} = n - t > l \Rightarrow d_{v_k} < n - l.$$

Међутим, последња неједнакост противуречи неједнакости (3.2). ■

[33] Вацлав Хватал (Václav Chvátal, 1946) – чешки математичар.

Диракова[34] теорема, која је једноставна за примену, директна је последица претходне.

**Теорема 3.6.4 (Диракова теорема).** *Граф који има барем* 3 *чвора и чији минимални степен чвора задовољава неједнакост*

$$\delta \geq \frac{n}{2}$$

*је Хамилтонов.*

*Доказ.* Импликација из Хваталове теореме важи уколико важи неједнакост из ове теореме. ■

Размотримо сада један проблем из домена полухамилтонових графова.

**Пример 3.6.5 (проблем коњичког скока).** Нека је дата правоугаона табла формата $m \times n$ (која се за $m = 8$, $n = 8$ своди на шаховску таблу). Обићи сва поља табле скакачем (шаховска фигура) тако да скакач стане на свако поље тачно једанпут.

Релација са полухамилтоновим графовима јасно је уочљива. Свакој табли можемо придружити граф чији чворови одговарају пољима табле, при чему су чворови суседни ако и само ако скакач у једном потезу може прећи са једног од одговарајућих поља на друго.

На овај начин питање постојања решења проблема своди се на испитивање да ли је придружени граф полухамилтонов или није. Ако (рецимо, на основу неке теореме) закључимо да је граф полухамилтонов, онда у општем случају одређивање постојећег Хамилтоновог пута није једноставан задатак.

Занимљиво је напоменути да је познато да решење постоји за све табле формата $m \times n$, за $m, n \geq 3$, са изузецима табли формата $3 \times 3, 3 \times 5, 3 \times 6$ и $4 \times 4$.

Један од начина да се дође до решења проблема коњичког скока у случају шаховске табле (дакле, формата $8 \times 8$) је да се табла подели на мање табле и да се проблем реши за сваку од њих. Коначно решење се потом добија тако што се најпре обиђе прва подтабла, па се једним потезом пређе на суседну, и тако редом. На пример, решења за табле формата $3 \times 4$ и $4 \times 5$ илустрована су на следећој слици.

[34] Габор Ендре Дирак (Gábor Endre Dirac, 1925–1984) – мађарски математичар.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 5 | 8 |
| 7 | 2 | 11 |
| 4 | 9 | 6 |
| 1 | 12 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 13 | 18 |
| 14 | 19 | 8 | 3 |
| 5 | 10 | 17 | 12 |
| 20 | 15 | 2 | 7 |
| 1 | 6 | 11 | 16 |

Користећи симетрије подтабли и чињеницу да једно решење обезбеђује још једно које се добија крећући се унатраг (од последњег ка првом пољу), комбиновањем две мање табле долазимо до једног решења проблема коњичког скока на шаховској табли (означили смо само релевантна поља).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 13 | 32 | | | |

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| 53 | 64 | |

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 12 |
| | | |
| | | |
| | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 33 | 52 | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

### 3.6.1 Проблем трговачког путника

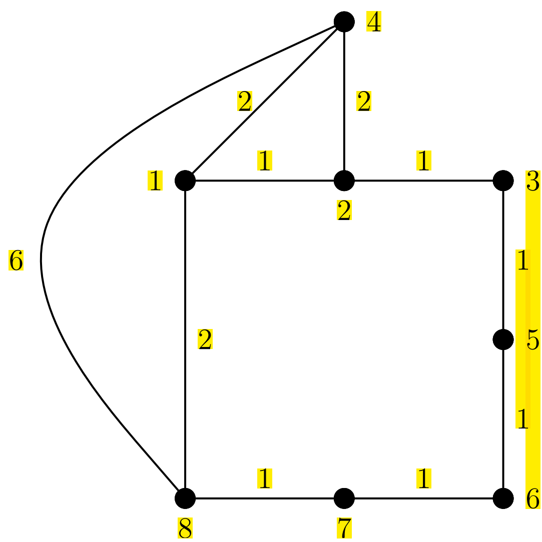
*Проблем трговачког путника* има пуно варијација од којих се неке могу пронаћи у [8, 18]. Овде ћемо се задржати на изворној формулацији. Нека је дат скуп градова од којих су неки повезани путем одређене дужине (на пример, изражене у километрима). Трговачки путник треба да обиђе сваки град тачно једанпут и врати се у онај из којег је кренуо, а да том приликом пређе најкраћи пут.

У овом контексту можемо размотрити тежински граф чији чворови репрезентују градове, гране путеве између њих, а тежине грана дужине путева. Неопходан услов да трговачки путник уопште може извршити задатак је да је придружени граф Хамилтонов. У том случају, проблем трговачког путника своди се на одређивање Хамилтоновог циклуса минималне тежине у тежинском графу.

Рецимо, ако су свака два града повезана путем и има их барем три, Хамилтонов циклус свакако постоји, те треба одредити онај чија је тежина минимална. Такав циклус називамо *оптимални циклус*. Проблем одређивања таквог циклуса је *NP*-тежак, а у литератури постоји велики број алгоритама за његово решавање. (За *NP*-тешке проблеме верује се да не постоје ефикасни алгоритми за њихово решавање, то јест да се, у најнеповољнијем случају, не могу решити алгоритмима сложености која је полиномијална функција од величине улаза.)

Један метод за одређивање оптималног циклуса подразумева одређивање свих циклуса и потом издвајање оног који је минималне тежине. Јасно је да је овакав приступ веома неефикасан. Са друге стране, стратегија да увек треба ићи до најближег (у смислу минималне тежине гране) суседног чвора, у општем случају, не доводи до оптималног решења, што је илустровано следећим примером.

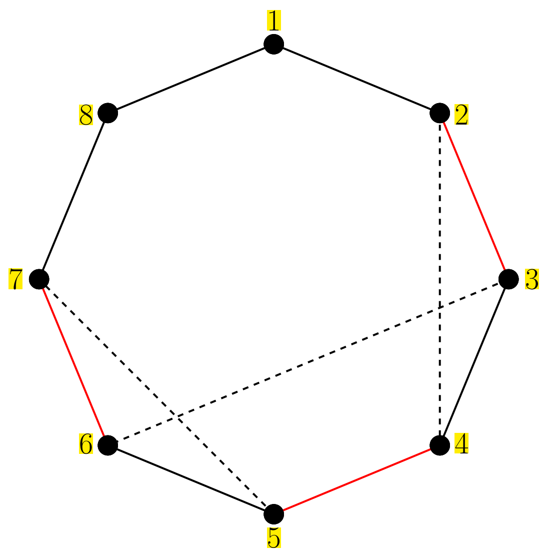
**Пример 3.6.6.** Хамилтонов циклус који полази од чвора 1 тежинског графа са слике формиран описаном стратегијом одређен је низом чворова 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4. Тај циклус није оптимални пошто је његова тежина већа од тежине Хамилтоновог циклуса одређеног низом чворова 1, 4, 2, 3, 5, 6, 7, 8.




Поред алгоритама који дају оптимално решење проблема трговачког путника, постоје и такозвани хеуристички алгоритми (или хеуристике). Заједничка својства свих хеуристика су да је њихова примена једноставна (у смислу да се могу једноставно имплементирати и да не захтевају сложена израчунавања која се, захваљујући томе, могу понављати велики број пута), али да у општем случају не дају оптимално, већ решење које је у неком смислу речи блиско оптималном. Решења која се добијају применом хеуристика називају се *подоптималним*.

Описаћемо такозвану 3-*хеуристику*. Ова хеуристика примењује се на комплетне тежинске графове, односно, у складу са ранијом терминологијом, примењује се у ситуацијама у којима су свака два града повезана путем. Нека је $s_1$ један Хамилтонов циклус комплетног тежинског графа. Уклањањем 3 несуседне гране циклуса $s_1$ добијамо подграф тог циклуса који се састоји од 3 пута. Спајањем крајева тих путева на одговарајуће начине добијамо нове Хамилтонове циклусе. Да би ово било јасније, наведимо један пример.

**Пример 3.6.7.** Размотримо Хамилтонов циклус $C_8$ (садржан у комплетном графу $K_8$) који је на слици одређен редом чворовима од 1 до 8.




Уклањањем грана 23, 45 и 67 циклуса добијамо 3 пута: један садржи чворове 7, 8, 1 и 2, други чворове 3 и 4, а трећи чворове 5 и 6. Спајањем чворова 2 и 4, 3 и 6, и 5 и 7 добијамо нови циклус. (Спајање смо могли извршити јер је разматрани граф комплетан.)

Настављамо тамо где смо стали. Није тешко утврдити да различитим спајањима крајева путева добијамо 8 циклуса (један од њих је $s_1$). Сада је јасно шта даље треба радити. Од добијених циклуса бирамо онај који је минималне тежине (тај циклус не мора бити јединствен и може се догодити да то поново буде $s_1$), означавамо га са $s_2$ и на њега примењујемо претходну процедуру. На овај начин добијамо низ

Хамилтонових циклуса $s_1, s_2, \ldots$, такав да је тежина сваког наредног мања или једнака од тежине претходног. Процедура се завршава када се испуни неки од унапред задатих критеријума (који се углавном односе на број итерација или тежину циклуса).

Напослетку, избор 3 гране које се уклањају може се вршити на разне начине. Рецимо, то може бити случајан избор или то могу бити гране веће тежине (у односу на остале). У случају да избор грана не доводи до промене циклуса, треба покушати са другачијим избором.

## Задаци

**1.** Доказати да је граф који се добија уклањањем било којег чвора Петерсеновог графа Хамилтонов. Доказати да је комплемент Петерсеновог графа Хамилтонов и одредити један Хамилтонов циклус тог графа.

**2.** Под којим претпоставкама је (затворена) Ојлерова стаза неког графа истовремено и Хамилтонов циклус тог графа.

**3.** Доказати да комплетан граф $K_n$, $n \geq 3$, садржи

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Хамилтонових циклуса.

**4.** Доказати да комплетан бипартититан граф $K_{n,n}$, $n \geq 2$, садржи

$$\frac{(n-1)!n!}{2}$$

Хамилтонових циклуса.

**5.** Ако су чворови графа уређени као у Хваталовој теореми, доказати да свака од претпоставки

$$d_{v_k} \geq k+1, \quad \text{за} \quad k < \frac{n}{2},$$

и

$$d_{v_k} \leq k, d_{v_l} \leq l \Rightarrow d_{v_k} + d_{v_l} \geq n, \quad \text{за} \quad k \neq l,$$

имплицира претпоставку Хваталове теореме, то јест обезбеђује хамилтоновост разматраног графа.

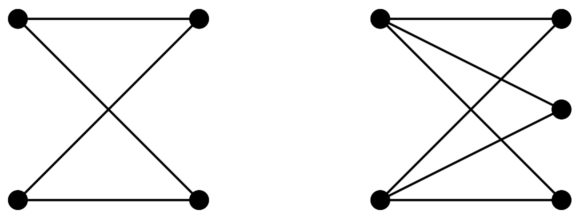
**6.** Да ли постоји решење проблема коњичког скока у којем скакач полази из поља које се налази у једном углу табле формата $n \times n$, а завршава у дијагонално супротном пољу? Образложити.

**7.** Имплементирати 3-хеуристику у неком програмском језику.

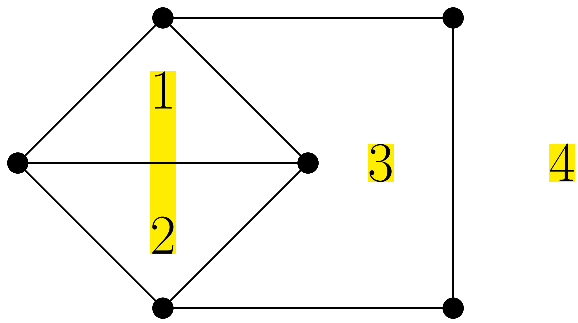
## 3.7 Планарни графови

За граф кажемо да је *планарни* уколико се може представити у равни тако да се његове гране међусобно не пресецају. Ова дефиниција није заснована на скуповној дефиницији графа, већ на његовој графичкој репрезентацији. Наравно, сматрамо да се гране које се додирују само у заједничком чвору не пресецају.

**Пример 3.7.1.** Оба графа са слике су планарни, будући да се могу представити тако да им се гране не пресецају.



Сваки повезан планарни граф који је представљен тако да му се гране не пресецају дели раван на неки број области, од којих је тачно једна бесконачна. Један такав граф и одговарајућа подела илустровани су на Слици 3.5.




Слика 3.5: Планарни граф и одговарајућа подела равни.

У следећој теореми доказаћемо да је број области јединствено одређен основним инваријантама графа.

**Теорема 3.7.2 (Ојлерова теорема за планарне графове).** *За сваки повезан планарни граф $G$ који је представљен у равни тако да му се гране не пресецају важи једнакост*

$$n - m + f = 2,$$

*при чему је $n$ број чворова, $m$ број грана, а $f$ број области на које граф дели раван.*

*Доказ.* Индукцијом по броју грана. Пошто је $G$ повезан, минимални број грана које садржи једнак је $n-1$ и тада је $G$ стабло. У случају стабла очигледно важи $f=1$, одакле следи тврђење. Претпоставимо да тврђење важи за све повезане графове са мање од $m$ грана и докажимо да важи за граф $G$ који има $m \geq n$ грана. Пошто наш граф има најмање $n$ грана, он садржи најмање један циклус. Нека је $e$ грана тог циклуса. Граф $G-e$ је повезан (јер $e$ припада циклусу) и дели раван на једну област мање од графа $G$ (јер $e$ ограничава тачно две области). Према индуктивној хипотези (примењеној на граф $G-e$) важи $n-(m-1)+(f-1)=2$, одакле следи тражена једнакост. ■

Ево још једне одреднице.

**Теорема 3.7.3.** *Нека је $G$ повезан граф у којем најкраћи циклус има $g$ грана. Ако важи неједнакост*

$$m > \frac{(n-2)g}{g-2},$$

*онда $G$ није планарни граф.*

*Доказ.* Претпоставимо да је $G$ планарни граф (представљен тако да му се гране не пресецају) и докажимо да тада дата неједнакост не важи.

Нека је $c(F)$ број грана које ограничавају област $F$. Будући да свака грана ограничава две области, важи $\sum_F c(F) = 2m$ (сумирање вршимо по свим областима којих је укупно $f$). Са друге стране, свака област је ограничена са најмање $g$ грана, па важи $2m \geq gf$.

Користећи претходну теорему, добијамо

$$2 = n - m + f \leq n - m + \frac{2m}{g} = n - \frac{m(g-2)}{g},$$

одакле следи неједнакост

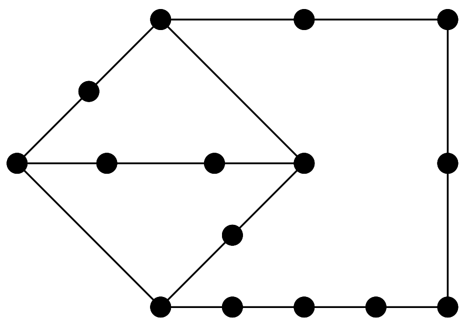
$$m \leq \frac{(n-2)g}{g-2},$$

чиме је доказ завршен. ■

Претходна теорема има теоријски значај, јер даје једно структурно својство планарних графова. Ускоро ћемо се упознати са једноставним тестом којим се утврђује да ли је неки граф планарни или није. За то нам је потребна наредна дефиниција.

*Потподела графа $G$* добија се заменом сваке гране тог графа нетривијалним путем произвољне дужине (који спаја чворове који су били инцидентни са граном). Неформално, потподела графа добија се узастопним додавањем произвољног броја чворова свакој грани.

**Пример 3.7.4.** Ово је једна потподела графа са Слике 3.5.



Следи најављени тест.

**Теорема 3.7.5.** *Граф је планарни ако и само ако не садржи подграф који је изоморфан некој потподели графа $K_5$ или графа $K_{3,3}$.*

Једна импликација се једноставно доказује. Наиме, није тешко уверити се да ниједан од графова $K_5$ и $K_{3,3}$ није планарни, па отуда графови који се добијају њиховим потподелама такође нису планарни. Доказ друге импликације може се пронаћи у [5, 34].

## Задаци

**1.** Доказати да регуларан граф са 7 чворова степена 4 није планарни.

**2.** Доказати следеће уопштење Ојлерове теореме за планарне графове: за планарни граф који не мора бити повезан, али је представљен тако да му се гране не пресецају важи једнакост

$$n - m - f = 1 + p,$$

при чему је $p$ број компонената повезаности, а остале ознаке имају исто значење као у наведеној теореми.

**3.** Користећи Теорему 3.7.3, доказати да планарни граф који има најмање 3 чвора има највише $3(n-2)$ грана.

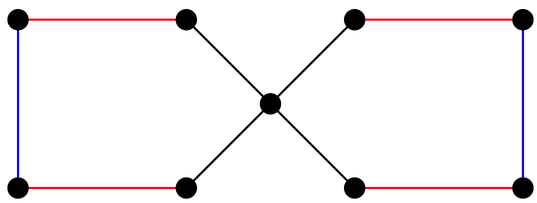
**4.** Користећи претходни задатак, доказати да планарни граф садржи чвор чији је степен највише 5.

**5.** Доказати да су графови $K_5 - e$ и $K_{3,3} - e$, при чему је $e$ произвољна грана, планарни.

## 3.8 Спаривања у графовима

*Сӣаривање* у графу је подскуп скупа грана такав да никоје две гране тог подскупа нису суседне у графу.

**Пример 3.8.1.** На слици су илустрована два спаривања у датом графу. (Гране једног спаривања илустроване су црвеном, а другог плавом бојом.)



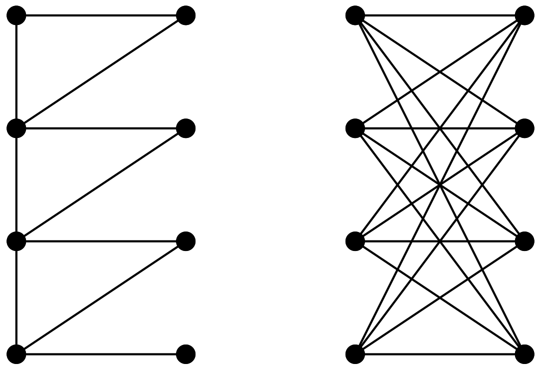
*Максимално сӣаривање* у графу је спаривање којем се не може додати грана тако да оно остане спаривање. *Највеће сӣаривање* у графу је оно које садржи највећи број грана. Ни максимално ни највеће спаривање не мора да буде јединствено. Црвено спаривање из Примера 3.8.1 је максимално и највеће што се једноставно проверава. Плаво спаривање није максимално, па тиме није ни највеће. Када бисмо му додали грану инцидентну са чвором степена 4, плаво спаривање би постало максимално, али и даље не би било највеће. Свако највеће спаривање истовремено је и максимално.

*Савршено сӣаривање* у графу је спаривање такво да је сваки чвор тог графа инцидентан са једном граном спаривања. Граф не мора да садржи савршено спаривање, а један такав граф дат је у Примеру 3.8.1. Штавише, ако граф има непаран број чворова, онда он не може имати савршено спаривање. Свако савршено спаривање је истовремено и највеће спаривање, а под претпоставком да савршено спаривање постоји, важи и обратно.

**Пример 3.8.2.** Пут парне дужине наравно нема савршено спаривање, док пут непарне дужине има јединствено савршено спаривање, што није тешко утврдити.

Слично, циклус парне дужине има тачно два савршена спаривања. Уколико са $M$ означимо једно од њих, тада је друго одређено резликом скупова $E \backslash M$.

На слици су илустрована два графа за које није тешко закључити да садрже савршена спаривања.



Други граф са слике је комплетан бипартитан и њега од раније означавамо са $K_{4,4}$. Овај граф има 4! савршених спаривања. Заиста, постоје 4 могућности за грану савршеног спаривања која је инцидентна са једним фиксираним чвором. Након тога, постоје 3 могућности за грану инцидентну са неким другим чвором из истог скупа партиције чворова, потом 2 могућности за наредни чвор и 1 могућност за преостали чвор, што даје $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ могућности, односно савршених спаривања.

Наравно, важи и општи закључак у складу са којим комплетан бипартитан граф $K_{n,n}$ има $n!$ савршених спаривања, а на сличан начин може се доказати да комплетан граф $K_{2n}$ има

$$\frac{(2n)!}{n!2^n}$$

савршених спаривања.

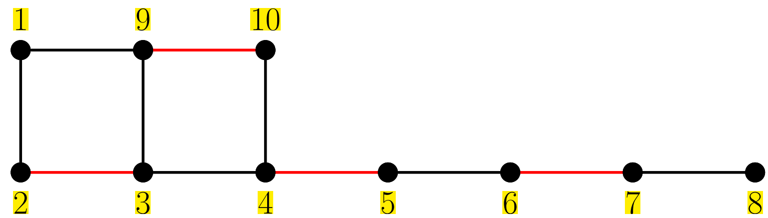
У наставку ћемо размотрити питање постојања највећег спаривања у графу. Као што ћемо видети, то питање је у потпуности разрешено једним „ако и само ако” тврђењем. За почетак, неопходне су неке дефиниције.

Нека је $M$ произвољно спаривање у графу $G$. За чвор $u$ тог графа који није инцидентан ни са једном граном спаривања $M$ кажемо да је *слободан* у односу на $M$. За пут

$$P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k)$$

у графу $G$ кажемо да је *$M$-алтернирајући* уколико или све гране непарног индекса или све гране парног индекса пута $P$ припадају спаривању $M$. Другим речима, гране пута наизменично припадају и не припадају датом спаривању. *$M$-увећани пут* је $M$-алтернирајући пут код којег су само крајњи чворови слободни у односу на спаривање $M$. Такав пут не мора да постоји.

**Пример 3.8.3.** На слици је назначено једно спаривање $M$ које садржи 4 гране. Пут одређен низом чворова од 2 до 8 је $M$-алтернирајући, а пут $P$ одређен низом чворова од 1 до 8 је $M$-увећани.




Уочимо да спаривање $M$ није највеће и да је једно веће спаривање одређено са $M \triangle E(P)$, при чему $\triangle$ означава симетричну разлику два скупа.

Напокон смо спремни за најављени резултат заснован на ономе што смо уочили у примеру, а познат као Бержова[35] теорема.

**Теорема 3.8.4 (Бержова теорема).** *Спаривање $M$ у графу $G$ је највеће ако и само ако $G$ не садржи $M$-увећани пут.*

*Доказ.* Претпоставимо да је спаривање $M$ највеће и нека, насупрот тврђењу, граф $G$ садржи $M$-увећани пут, рецимо $P$. Приметимо да је $M \triangle E(P)$ (при чему ознаке $\triangle$ и $E(P)$ имају исто значење као у Примеру 3.8.3) такође спаривање у разматраном графу. Штавише, то спаривање садржи једну грану више (од $M$), што значи да $M$ није највеће.

Другу импликацију доказаћемо тако што ћемо доказати контрапозицију, то јест претпоставићемо да спаривање $M$ није највеће и доказаћемо да тада граф садржи $M$-увећани пут. Ако $M$ није највеће спаривање, онда постоји спаривање $M'$ које је највеће и тиме садржи више грана од $M$. Размотримо подграф графа $G$ чији је скуп грана одређен унијом скупова $M$ и $M'$. Степен сваког чвора таквог подграфа није већи од 2. (Сваки чвор инцидентан је са највише две гране које припадају различитим спаривањима.) Другим речима, све компоненте повезаности разматраног подграфа су путеви или циклуси. Будући да сваки циклус садржи једнак број грана из спаривања $M$ и $M'$ (циклус мора бити парне дужине и његове гране наизменично припадају једном па другом спаривању) и да спаривање $M'$ садржи више грана, закључујемо да мора постојати компонента која је пут који садржи једну грану више из $M'$ него из $M$. У том случају, гране таквог пута наизменично припадају спаривањима $M$ и $M'$, с тим да прва и последња грана пута припадају спаривању $M'$. Тај пут је, дакле, тражени $M$-увећани пут. ■

[35] Клод Жак Берж (Claude Jacques Berge, 1926–2002) – француски математичар.

**Пример 3.8.5.** Већ смо констатовали да спаривање $M$ из Примера 3.8.3 није највеће, а такав закључај следи и на основу Бержове теореме, пошто граф садржи $M$-увећани пут. Највеће спаривање истог графа садржи 5 грана и у односу на такво спаривање не постоји увећани пут.

Постоји велики број примена спаривања у графовима. Једна од њих може се сусрести код такозваног *проблема распореда послова* (у некој литератури, *проблем запошљавања* или *проблем асигнације*). Претпоставимо да је дат неки скуп послова и са друге стране скуп радника. Такође, дати су и подаци који говоре о томе које послове сваки од радника уме да ради. Оно што се тражи је један распоред радника на послове тако да што више послова буде покривено и да што више радника буде запослено.

Уколико претпоставимо да је за обављање сваког од послова довољан један радник и да су радници једнако ефикасни у обављању послова, добијамо најједноставнији облик проблема. Јасно, овако формулисани проблем може се моделирати бипартитним графом код којег чворови једног скупа партиције одговарају пословима, чворови другог скупа одговарају радницима и при том су два чвора спојена граном ако и само ако одговарајући радник уме да ради дати посао.

У оваквој ситуацији одређивање оптималног распореда радника своди се на одређивање највећег спаривања у бипартитном графу. За то постоји више алгоритама, а међу најпознатије спада такозвани *мађарски алгоритам*. Овде га нећемо наводити, а може се пронаћи у [5, 15, 31, 34]. Мађарски алгоритам заснован је на Бержовој теореми и још неким теоријским резултатима двојице мађарских математичара, па му отуда и назив.

Сложеније варијанте проблема распореда послова захтевају различите бројеве радника за појединачне послове или допуштају различите ефикасности самих радника. Приликом решавања таквих проблема користе се тежински (бипартитни) графови код којих тежине грана, рецимо, могу репрезентовати време потребно за обављање посла од стране појединачних радника. Један од најпознатијих алгоритама за решавање тако формулисаног проблема је Кун[36]-Манкресов[37] алгоритам (видети поново [5, 15, 31, 34]).

## Задаци

**1.** Доказати да стабло може имати највише једно савршено спаривање.

[36]Харолд Вилијем Кун (Harold William Kuhn, 1925–2014) – амерички математичар.
[37]Џејмс Рејмонд Манкрес (James Raymond Munkres, 1930) – амерички математичар.

**2.** Нека је дато стабло које има $2n$, $n \geq 1$, чворова. У складу са претходним задатком, ово стабло може имати савршено спаривање, то јест спаривање које се састоји од $n$ грана, што је дакле максимални број грана спаривања у стаблу. Одредити једно стабло које није пут и за које се тај број достиже. Која је доња граница за број грана највећег спаривања у стаблу и у случају којих стабала се достиже?

**3.** Доказати да повезан граф са парним бројем чворова који не садржи индуковани подграф изоморфан графу $K_{1,3}$ има савршено спаривање.

**4.** Доказати да сваки бипартитан регуларан граф има савршено спаривање.

**5.** Конструисати један регуларан граф степена 3 који нема савршено спаривање. Извести општи принцип за конструкцију регуларног графа произвољног степена са истим својством.

## 3.9 Бојења графова

*Бојење чворова* графа је функција која сваки чвор графа пресликава у неку боју из датог скупа боја. У том случају кажемо да је чвор обојен одговарајућом бојом. За бојење чворова кажемо да је *правилно* уколико су суседни чворови обојени различитим бојама.

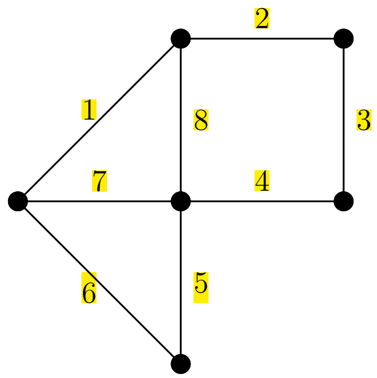
*Бојење грана* графа је функција која сваку грану графа пресликава у неку боју из датог скупа боја. Као у претходном случају, кажемо да је грана обојена одговарајућом бојом, а за бојење грана кажемо да је правилно уколико су суседне гране обојене различитим бојама. Проблем бојења грана графа може се свести на проблем бојења чворова његовог линијског графа.

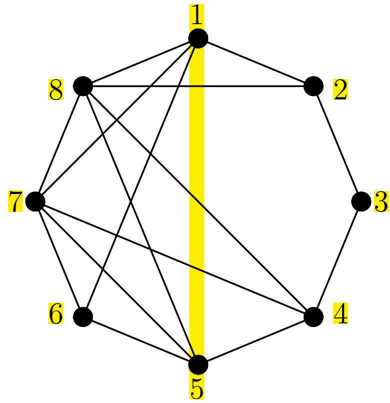
*Линијски граф* графа $G$, у ознаци $L(G)$, је граф је који се добија на следећи начин:

- скуп чворова графа $L(G)$ одговара скупу грана графа $G$,
- чворови графа $L(G)$ су суседни ако и само ако су њима одговарајуће гране суседне у графу $G$.

Кажемо да је $G$ *коренски граф* свог линијског графа. (Овај термин не треба доводити у везу са раније спомињаним коренским стаблима.)

**Пример 3.9.1.** На слици је илустрован граф $G$ са нумерисаним гранама и његов линијски граф $L(G)$. Будући да $G$ има 8 грана, $L(G)$ има 8 чворова. Суседства између чворова одређена су претходном дефиницијом.




Јасно је да сваки граф, до на изоморфизам, има тачно један линијски граф и да бојење грана графа једнозначно одређује бојење чворова његовог линијског графа. Обратно, из теорије графова познат је резултат у складу са којим сваком линијском графу који није изоморфан графу $K_3$ одговара тачно један коренски граф. Другим речима, ако је неки граф линијски и није изоморфан графу $K_3$, онда он једнозначно одређује коренски граф и бојење чворова линијског графа једнозначно одређује бојење грана његовог коренског графа.

У складу са претходном дискусијом, у наставку ћемо детаљније изложити бојење чворова графа. Надаље, када год кажемо „бојење графа” имаћемо у виду бојење његових чворова!

За граф кажемо да је *$k$-обојив* уколико се може правилно обојити коришћењем $k$ боја. Прецизније, граф је $k$-обојив уколико постоји функција која сваки чвор тог графа пресликава у неку боју из скупа од $k$ боја тако да се суседни чворови пресликавају у различите боје.

Минималну вредност $k$ за коју је граф $k$-обојив, у ознаци $\chi$, називамо *хроматски број* графа. Хроматски број је једна инваријанта графа.

Приметимо да се бојење неповезаног графа може разматрати тако што се бојење сваке компоненте повезаности разматра независно од бојења осталих компонената. Ово нас, рецимо, доводи до једноставног закључка да је хроматски број неповезаног графа једнак максималном од хроматских бројева његових компонената. У складу са претходним, у контексту бојења графова најчешће се разматрају само повезани графови.

**Пример 3.9.2.** Комплетан граф $K_n$ може се правилно обојити коришћењем $n$ боја. Будући да су сви чворови овог графа међусобно суседни, закључујемо да је његов хроматски број заиста једнак $n$ (то јест, не може бити мањи).

Није тешко закључити да се сваки пут који садржи најмање 2 чвора може правилно обојити тако што се наизменично употребљавају две боје, те да важи $\chi(P_n) = 2$, $n \geq 2$.

Важи и општији закључак да је хроматски број бипартитног графа који има барем једну грану једнак 2. Чворови из једног скупа партиције боје се једном бојом, а чворови из другог скупа другом бојом. Овакви бипартитни графови се због овог својства називају и *бихроматски графови*.

Слично, за циклус $C_n$ важи

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 2k, \\ 3, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k \geq 2.$$

Упознаћемо се сада са неким својствима хроматског броја. За граф кажемо да је *$\chi$-критичан* уколико је његов хроматски број једнак $\chi$ и уколико је хроматски број сваког његовог правог подграфа мањи од $\chi$. Сваки граф чији је хроматски број једнак $\chi$ садржи $\chi$-критичан подграф. Приметимо да $\chi$-критичан граф мора бити повезан.

**Лема 3.9.3.** *Ако је граф $\chi$-критичан, онда минимални степен чвора тог графа задовољава неједнакост $\delta \geq \chi - 1$.*

*Доказ.* Претпоставимо да је неки граф $G$ $\chi$-критичан и да за њега, насупрот тврђењу, важи неједнакост $\delta \leq \chi - 2$. Нека је $u$ чвор минималног степена, то јест нека важи $d_u = \delta$.

Пошто је $G$ $\chi$-критичан, закључујемо да је граф $G - u$ ($\chi$-1)-обојив. Уз то, за бојење суседа чвора $u$ (у $G$) употребљено је највише $\chi$-2 боја (јер тих суседа нема више од толико). Другим речима, међу бојама употребљеним за бојење графа $G - u$ постоји боја која није употребљена за бојење неког суседа чвора $u$, па $u$ можемо обојити управо том бојом. Дакле, и $G$ је $(\chi - 1)$-обојив, што је у супротности са претпоставком да је $G$ $\chi$-критичан. ■

**Лема 3.9.4.** *Ако је $\chi$ хроматски број повезаног графа $G$, онда $G$ садржи најмање $\chi$ чворова чији је степен већи или једнак од $\chi - 1$.*

*Доказ.* Ако је $H$ подграф графа $G$ који је $\chi$-критичан, онда према претходној леми степен сваког чвора графа $H$ није мањи од $\chi$-1. Исто важи и уколико се чворови графа $H$ разматрају као чворови његовог надграфа $G$. Пошто је хроматски број графа $H$ једнак $\chi$, закључујемо да $H$ има најмање $\chi$ чворова, одакле следи тврђење. ■

Наредни резултат следи директно из претходне леме.

**Теорема 3.9.5.** *Хроматски број и максимални степен чвора сваког повезаног графа задовољавају неједнакост*

$$\chi \leq \Delta + 1. \tag{3.5}$$

*Доказ.* У складу са лемом, разматрани граф садржи чвор чији степен није мањи од $\chi$-1, а отуда важи и да максимални степен чвора тог графа није мањи од $\chi$-1. ■

Горња граница за хроматски број дата у претходној теоерми некада значајно одступа од вредности хроматског броја. Рецимо, у Примеру 3.9.2 закључили смо да је хроматски број било којег бипартитног графа који има барем једну грану једнак 2. Са друге стране, максимални степен чвора таквог графа може имати произвољну вредност. У овом контексту, поставља се питање одређивања графова за које се достиже једнакост у формули (3.5). Одговор на то питање даје Бруксова[38] теорема.

**Теорема 3.9.6 (Бруксова теорема).** *Једнакост у формули* (3.5) *важи ако и само ако је разматрани граф изоморфан комплетном графу или циклусу непарне дужине.*

Доказ се може пронаћи у [5, 31, 34].

Слично као у случају спаривања у графовима, и код бојења постоје алгоритми који дају оптимално бојење чворова (то јест, оно које користи минимални број боја). Поред њих, упоредо се развијају и хеуристички алгоритми. Једна таква хеуристика се сама намеће. Нека су чворови графа означени са $v_1, v_2, \dots, v_n$ (рецимо да је то означавање произвољно) и нека је дат уређени скуп од $n$ боја. Чворове бојимо редом почевши од $v_1$ који бојимо првом бојом из скупа боја. Када дођемо до чвора $v_i$, бојимо га бојом која је прва боја скупа боја која није употребљена за бојење његових суседа.

Јасно је да је оваква хеуристика похлепна будући да бира локално најповољније решење. Она ће увек дати једно ефикасно (у смислу брзине извршавања) и правилно бојење графа, али ће у случају неких графова употребити више боја него што је потребно. Низ алгоритама који дају бојење графа, уз употребу минималног броја боја, заснован је на овој хеуристици. Неки од њих могу се пронаћи у [6, 15, 23].

У наредним примерима упознаћемо се са два проблема из домена бојења графова. Још један проблем размотрен је у пододељку који следи.

**Пример 3.9.7 (проблем распореда испита).** На крају семестра студенти полажу испите из одслушаних предмета. За сваки испит постоји један термин у испитном року. Израчунати минимални број термина такав да сваки студент може полагати све испите које жели.

[38] Роуленд Леонард Брукс (Rowland Leonard Brooks, 1916–1993) – енглски математичар.

Означимо са $S$ скуп студената, а са $I$ скуп испита. За сваки испит $i \in I$, нека је $N_i$ скуп студената који намеравају да га полажу. Уколико је $j$ испит различит од $i$, тада важи следеће: ако важи $N_i \cap N_j \neq \emptyset$, онда се испити $i$ и $j$ морају одржати у различитим терминима.

Нека је сада $G$ граф чији чворови одговарају испитима (то јест, важи $V(G) = I$) и чији су чворови $i$ и $j$ суседни ако и само ако важи $N_i \cap N_j \neq \emptyset$. Сада је јасно да бојење графа $G$ коришћењем $k$ боја одговара распореду испита у $k$ термина. (Сви испити обојени истом бојом одржавају се у истом термину.) У складу са тим, минимални број термина који су неопходни за регуларно одржавање испитног рока једнак је хроматском броју графа $G$.

**Пример 3.9.8 (проблем складиштења).** У складиште треба распоредити $n$ материја међу којима су неке инкомпатибилне у смислу да при додиру изазивају нежељене реакције, те морају бити распоређене у различите одељке складишта. Колики је минимални број одељака неопходан за складиштење свих материја?

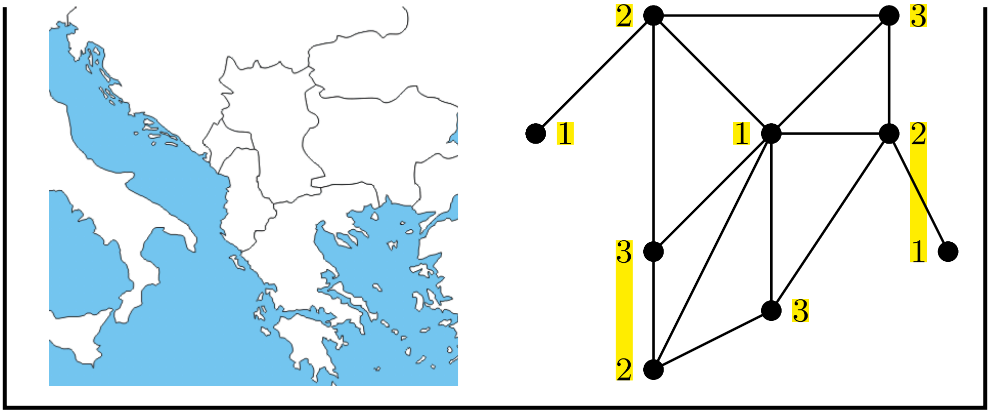
Размотримо граф формиран на сличан начин као у претходном примеру: сваки чвор одговара једној материји, а чворови су суседни ако и само ако су одговарајуће материје инкомпатибилне. Јасно, број неопходних одељака једнак је хроматском броју овог графа.

### 3.9.1 Проблем бојења мапа

*Проблем бојења мапа* датира из XIX века. Мапу територија (од којих је свака повезана) треба обојити минималним бројем боја, тако да свака територија буде обојена једном бојом и да суседне територије буду обојене различитим бојама. (Суседним територијама не сматрамо оне које имају заједничку границу дужине нула; такве су, рецимо, територије које се граниче у једној тачки).

Нека је $G$ граф чији чворови одговарају територијама и суседни су ако и само ако су одговарајуће територије суседне. Очигледно је да је $G$ планарни граф, те се проблем бојења мапа своди на одређивање хроматског броја одговрајућег планарног графа.

**Пример 3.9.9.** На слици су мапа дела Европе из 1914. године и припадни граф који је правилно обојен коришћењем 3 боје. (Неповезаност неких територија нема значаја у овом бојењу.)




Хејвуд[39] је 1890. године доказао да се сваки планарни граф може правилно обојити коришћењем 5 боја. Много јачи резултат доказали су Епл[40] и Хакен[41] 1976. године. Тај резултат познат је као *теорема о 4 боје* и представља решење хипотезе која није била решена више од једног века. Резултат наравно гласи да хроматски број планарног графа није већи од 4. Први доказ тереоме о 4 боје био је веома обиман и укључивао је резултате добијене након интензивних рачунарских израчунавања. Касније су се појавили једноставнији докази.

***Напомена 3.9.10.*** Са географског становишта, проблем бојења мапа коректно је формулисан. Са математичког, треба елиминисати неке могућности, рецимо да територија има границу бесконачне дужине. У таквој ситуацији, бојење мапе може захтевати више од 4 боје (детаљи се могу пронаћи у [20]).

Често се уз проблем бојења мапа разматра и проблем правилног бојења (планарног) графа са мање од 4 боје, на пример, трима бојама. Испоставља се да испитивање да ли је граф 3-обојив припада класи *NP*-комплетних проблема.

## Задаци

**1.** Израчунати хроматски број линијског графа Петерсеновог графа.

**2.** Доказати да ако је граф $G$ Ојлеров, онда је његов линијски граф $L(G)$ Ојлеров и Хамилтонов. Такође, ако је $G$ Хамилтонов, онда је и $L(G)$ Хамилтонов.

**3.** Доказати примерима да обрати тврђења из претходног задатка не важе.

[39] Перси Џон Хејвуд (Percy John Heawood, 1861–1955) – енглески математичар.
[40] Кенет Ајра Епл (Kenneth Ira Appel, 1932–2013) – амерички математичар.
[41] Волфганг Хакен (Wolfgang Haken, 1928) – немачки математичар.

**4.** Израчунати хроматски број $k$-димензионе коцке.

**5.** Доказати да за сваки регуларан граф степена $r$ важи неједнакост

$$\chi \geq \frac{n}{n-r}.$$

**6.** Ако су $u$ и $v$ чворови $\chi$-критичног графа, доказати да околина једног не може бити подскуп околине другог, то јест да важи

$$N(u) \not\subseteq N(v),$$

за било који избор чворова $u$ и $v$.

**7.** Навести један пример у којем хеуристика описана након Теореме 3.9.6 користи више него што је потребно боја за бојење графа.

**8.** Доказати да број чворова $\chi$-критичног графа не може бити једнак $\chi+1$.

**9.** Одредити све 1-критичне и 2-критичне графове. Доказати да је су циклуси непарне дужине једини 3-критични графови.

**10.** Доказати да граф чији је хроматски број једнак 4 садржи подграф изоморфан некој потподели графа $K_4$.

**11.** Саставити алгоритам за решавање проблема распореда испита и проблема складиштења.

**12.** У оквиру Пододељка 3.9.1 споменули смо да се сваки планарни граф може правилно обојити са 4 боје и да је у XIX веку доказано да се може правилно обојити са 5 боја. У оквиру овог задатка, доказати да је то изводљиво са 6 боја. (Наравно, не користити познате резултате.)

## 3.10 Растојања у усмереним тежинским графовима

Упознаћемо се са два алгоритма за одређивање растојања између чворова усмереног тежинског графа. Подсетимо да је усмерени пут дефинисан у Пододељку 3.1.3. Даље, тежину гране и тежину усмереног тежинског графа дефинишемо и означавамо онако како смо то чинили у случају (неусмерених) тежинских графова у Одељку 3.4. У складу са тим, *дужина усмереног пута* у усмереном тежинском графу једнака је његовој тежини, док је *растојање* између чворова $u$ и $v$, у ранијој ознаци $\mathrm{dist}(u,v)$, усмереног тежинског графа једнако дужини

Иницијална матрица растојања чија $i$-та врста и колона одговарају чвору означеном са $v_i$ $(1 \leq i \leq 6)$ дата је са

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 3 & 0 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 3 & 0 & 2 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.10.1 Дајкстрин алгоритам

У Пододељку 3.2.3 закључили смо да свака од две разматране претраге графова резултује (усмереним) разапињућим стаблом које смо назвали стабло претраге. У складу са Теоремом 3.2.1 (део (1)⇒(5)), такво разапињуће стабло одређује јединствени пут од полазног чвора до сваког чвора графа. У разним применама, од посебног интереса су (не било који већ) најкраћи путеви од једног чвора до свих осталих. У случају простог графа то су, од раније, путеви који садрже минимални број грана. Није тешко доказати да претрага по ширини даје управо такве путеве, што је један једноставан задатак за читаоца. Ми можемо размотрити и сложенији математички модел репрезентован усмереним тежинским графом. У случају оваквих графова користи се следећи алгоритам.

**Алгоритам 10 (Дајкстрин алгоритам).** Алгоритам прихвата усмерени тежински граф $G$ (који, рецимо, може бити задат иницијалном матрицом растојања) и изабрани чвор $r$ тог графа, а враћа растојања од чвора $r$ до свих чворова графа и одговарајуће најкраће путеве.

**BEGIN**

**INPUT** $G,\ r$

$prethodnik(u) = undefined,\ u \in V$ // чвор који претходи чвору $u$;
$rastojanje(r) = 0$;
$rastojanje(u) = \infty,\ u \in V \backslash \{r\}$ // растојање од $r$ до $u$;
$S = \emptyset$ // скуп размотрених чворова;

**WHILE** $S \neq V$

$u \in V \setminus S$ такав да је вредност $rastojanje(u)$ минимална;

```
  S := S ∪ {u};

    FOR свака грана облика (u,v), v ∈ V \ S

      IF rastojanje(u) + w((u,v)) < rastojanje(v)

         prethodnik(v) = u  //  промена претходника;
         rastojanje(v) = rastojanje(u) + w((u,v));

//  2. део псеудокода одређује најкраће путеве;
//  искористићемо чињеницу да је, након извршавања првог
//  дела, скуп S једнак скупу V;

WHILE |S| ≠ ∅

  u ∈ S;
  S := S \ {u};
  put = ();
  v = u;

  WHILE prethodnik(v) ≠ undefined

    put := v + put  //  додати v на почетак низа put;
    v := prethodnik(v);

  put := r + put;

  RETURN put, rastojanje(u)

END
```

У првом делу, алгоритам одређује претходника (у најкраћем путу) сваког чвора и израчунава растојања. У другом делу, алгоритам реконструише тражене путеве. Команда RETURN налази се унутар спољашње WHILE-петље, те се извршава за сваки чвор по једанпут. Алгоритам је могуће модификовати тако да уместо низа *prethodnik* памти низ низова који одређују путеве за сваки од чворова, уз изостављање другог дела псеудокода. Коректност алгоритма обезбеђује следећа теорема.

**Теорема 3.10.3.** *Дајкстрин алгоритам даје најкраће путеве од једног чвора усмереног тежинског графа до свих чворова тог графа.*

*Доказ.* Доказ ћемо извести индукцијом по кардиналности скупа $S$ из алгоритма. За $|S| = 1$, тврђење очигледно важи будући да важи једнакост $\mathrm{dist}(r,r) = 0$ и да су тежине грана ненегативне. Претпоставимо да тврђење важи за скуп $S$ кардиналности најмање 1 и означимо са $v$ чвор који се у складу са алгоритмом додаје скупу $S$. Нека је $u$ чвор који је суседни чвору $v$ у путу $P$ од чвора $r$ до $v$.

Доказаћемо да сваки други пут $P'$ од $r$ до $v$ није краћи од $P$. Нека је $(w_1, w_2)$ грана пута $P'$ за коју важи $w_1 \in S, w_2 \notin S$ и која је од свих грана тог облика најближа чвору $r$. (Будући да важи $r \in S, v \notin S$, таква грана постоји.) Означимо са $P''$ потпут пута $P'$ од чвора $r$ до чвора $w_1$ и нека је надаље $w(P)$ дужина пута $P$, $d(u)$ дужина најкраћег пута од чвора $r$ до чвора $u$ и

$$f(v) = \min_{u \in S} d(u) + w((u, v))$$

функција дефинисана на скупу чворова који не припадају скупу $S$ и за које постоји грана $(u, v)$. Тада важи следећи низ неједнакости:

$$w(P') \geq w(P'') + w((w_1, w_2)) \geq d(w_1) + w((w_1, w_2)) \geq f(w_2) \geq f(v),$$

при чему прва неједнакост важи јер су тежине свих грана ненегативне, друга је последица индуктивне хипотезе (пошто чвор $w_1$ припада скупу $S$, важи $d(w_1) \leq w(P'')$), трећа следи из дефиниције функције $f$, док четврта важи јер је $v$ (а не $w_2$) чвор који се додаје скупу $S$. На основу алгоритма, важи и $f(v) = w(P)$, одакле следи неједнакост $w(P') \geq w(P)$. ■

**Пример 3.10.4.** Применити Дајкстрин алгоритам на усмерени тежински граф из Примера 3.10.2 и чвор $v_1$.

Иницијализација:

$prethodnik(v_i) = undefined \ (1 \leq i \leq 6)$;
$rastojanje(v_1) = 0$;
$rastojanje(v_i) = \infty \ (2 \leq i \leq 6)$;
$S = \emptyset$.

Ток првог дела алгоритма:

- $S = \{v_1\}$;

  $prethodnik(v_6) = v_1$; $rastojanje(v_6) = 3$;

- $S = \{v_1, v_6\}$;

  $prethodnik(v_5) = v_6$; $rastojanje(v_5) = 7$;

- $S = \{v_1, v_6, v_5\}$;

  $prethodnik(v_3) = v_5$; $rastojanje(v_3) = 9$;

  $prethodnik(v_4) = v_5$; $rastojanje(v_4) = 10$;

- $S = \{v_1, v_6, v_5, v_3\}$;
  $prethodnik(v_2) = v_3$; $rastojanje(v_2) = 12$;
- $S = \{v_1, v_6, v_5, v_3, v_4\}$;
- $S = \{v_1, v_6, v_5, v_3, v_4, v_2\}$;

Други део алгоритма понавља исту процедуру за сваки од чворова. Ту процедуру демонстрираћемо у случају чвора $v_2$:

$v_2 \in S$;
$S = \{v_1, v_6, v_5, v_3, v_4\}$;
$put = ()$;
$v = v_2$;

- $put = (v_2)$; $v = v_3$;
- $put = (v_3, v_2)$; $v = v_5$;
- $put = (v_5, v_3, v_2)$; $v = v_6$;
- $put = (v_6, v_5, v_3, v_2)$; $v = v_1$;

$put = (v_1, v_6, v_5, v_3, v_2)$;

Резултат је: $put = (v_1, v_6, v_5, v_3, v_2)$, $rastojanje(v_2) = 12$.

На сличан начин добијамо остале најкраће путеве и њихове дужине:

| чвор | најкраћи пут | растојање |
|---|---|---|
| $v_1$ | $(v_1)$ | 0 |
| $v_2$ | $(v_1, v_6, v_5, v_3, v_2)$ | 12 |
| $v_3$ | $(v_1, v_6, v_5, v_3)$ | 9 |
| $v_4$ | $(v_1, v_6, v_5, v_4)$ | 10 |
| $v_5$ | $(v_1, v_6, v_5)$ | 7 |
| $v_6$ | $(v_1, v_6)$ | 3 |

.

### 3.10.2 Флојдов алгоритам

Ако су $v_1, v_2, \ldots, v_n$ чворови усмереног тежинског графа $G$, онда је *матрица растојања* тог графа, у ознаци $D(G)$, матрица формата $n \times n$ у којој је елемент на позицији $(i,j)$ једнак растојању $\mathrm{dist}(v_i, v_j)$. У основној формулацији, Флојдов алгоритам одређује управо ову матрицу на основу иницијалне матрице растојања коју ћемо у алгоритму такође означити са $D$.

**Алгоритам 11 (Флојдов алгоритам).** Алгоритам прихвата иницијалну матрицу растојања $D$ усмереног тежинског графа, а враћа матрицу растојања истог графа.

**BEGIN**

**INPUT** $D$

$n = size(D)$;

**FOR** $i = 1$ **TO** $n$

  **FOR** $j = 1$ **TO** $n$

    **FOR** $k = 1$ **TO** $n$

      **IF** $D(j,k) > D(j,i) + D(i,k)$

        $D(j,k) := D(j,i) + D(i,k)$;

**RETURN** $D$

**END**

За свака два чвора усмереног тежинског графа алгоритам ће потражити најкраћи пут (од једног до другог) који пролази кроз сваки од преосталих чворова. Формални доказ коректности Флојдовог алгоритма може се пронаћи у [6, 23].

**Пример 3.10.5.** Уколико бисмо Флојдов алгоритам применили на иницијалну матрицу растојања графа из Примера 3.10.2, сегмент псеудокода **IF** $D(j,k) > D(j,i) + D(i,k)$ извршио би се $6^3 = 216$ пута. Означимо 216 корака у којима се тај сегмент извршава са $(i,j,k)$, за $1 \leq i,j,k \leq 6$. У складу са алогритмом $(1,1,1)$ је први, $(1,1,2)$ други, а $(6,6,6)$ последњи корак.

Приметимо сада да велики број корака не резултује променом у матрици $D$. Први корак након којег долази до промене у матрици је $(2,3,1)$, а том приликом елемент $D(3,1)$ добија вредност 6. Затим, у кораку $(2,3,6)$ елемент $D(3,6)$ добија вредност 7, у кораку $(3,2,4)$ елемент $D(2,4)$ добија вредност 3, и тако редом. Напослетку, добијамо матрицу растојања:

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 9 & 10 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 10 & 7 & 4 & 0 & 2 & 11 \\ 8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разни параметри дефинисани у Пододељку 3.1.3, попут ексцентрицитета чвора и посебно инваријанти графа као што су радијус и дијаметар, једноставно се могу одредити на основу матрице растојања (простог) графа. Отуда се ова матрица често среће у контексту проблема у којима се разматрају управо ови и слични параметри. Наравно, исти параметри могу се аналогно дефинисати и у случају усмерених тежинских графова.

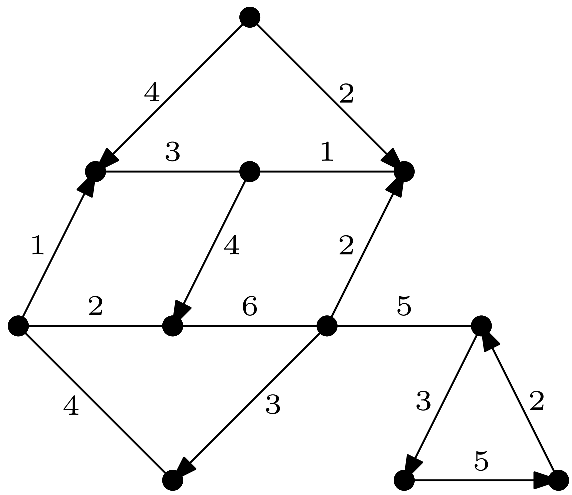
Флојдов алгоритам може се унапредити тако да одређује и најкраће путеве између свака два чвора (за детаље видети [6]). Такође, може се модификовати тако да враћа доступност између чворова, при чему је чвор $v$ *доступан* чвору $u$ уколико усмерени граф садржи пут од чвора $u$ до чвора $v$. У таквој ситуацији тежине грана не играју никакву улогу, па их треба изједначити са 1. Такође, алгоритам прекида извршавање чим се одреде путеви између свака два чвора (уколико постоје), то јест не одређује путеве који су краћи од њих.

## Задаци

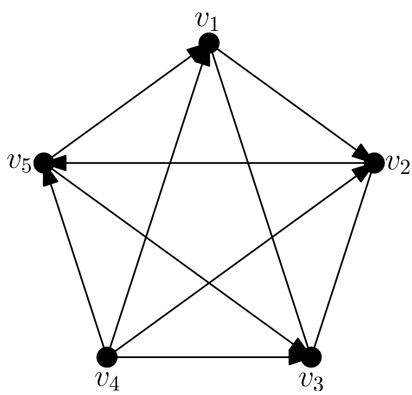
**1.** Доказати да стабло претраге по ширини простог графа одређује најкраће путеве од почетног чвора до свих чворова. (На пример, извести индуктивни доказ сличан доказу Теореме 3.10.3). Под којим претпоставкама исто важи и за стабло претраге по дубини?

**2.** Саставити модификацију Дајкстриног алгоритма која одређује растојање и најкраћи пут између два задата чвора усмереног тежинског графа. Општије, нека је скуп чворова усмереног тежинског графа подељен у два непразна дисјунктна подскупа $R$ и $S$. Саставити алгоритам који одређује најкраћа растојања и одговарајуће путеве од сваког чвора скупа $R$ до сваког чвора скупа $S$. (Дајкстрин алгоритам даје решење у случају када је скуп $R$ једночлан.)

**3.** Применити Дајкстрин и Флојдов алгоритам на граф са слике чије неусмерене гране заправо имају обострано усмерење. (Најпре некако означити чворове, а у случају првог алгоритма определити се за почетни чвор.)




**4.** Комплетан усмерени граф чија свака грана има највише једно усмерење називамо *турнир*. Такав граф репрезентује резултате једног (рецимо, шаховског) турнира у којем је сваки играч играо по једну партију са сваким од осталих играча. Грана $(v_i, v_j)$ репрезентује победу играча $v_i$ над $v_j$, а неусмерена грана репрезентује реми. Један такав граф илустрован је на слици.




Уколико је, у духу турнира, тежина усмерене гране једнака је 1, а неусмерене $\frac{1}{2}$, тада је иницијална матрица растојања графа са слике дата са

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \frac{1}{2} & \infty & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Најпре једноставно питање: ко је победник шаховског турнира репрезентованог графом са слике? Израчунати колико се пута, у најнеповољнијем случају, извршава сегмент псеудокода $D(j,k) = D(j,i) + D(i,k)$ Флојдовог алгоритма уколико турнир има тачно $t$ усмерених грана. Како се у резултату шаховског турнира интерпретира велика дужина пута од чвора $v_i$ до чвора $v_j$?

**5.** Имплементирати Дајкстрин и Флојдов алгоритам у неком програмском језику.

**6.** Користећи Флојдов алгоритам, саставити алгоритам који одређује доступност између чворова усмереног графа.